2-1. Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne.

Szanowni Państwo, poniżej znajdą Państwo podstawowe informacje dotyczące liczb rzeczywistych, wymiernych i niewymiernych.

1. Liczby wymierne. Przypomnijmy, że na naszych zajęciach zbiór liczb naturalnych definiujemy jako

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Ten zbiór jest zamknięty na dodawanie i mnożenie, to znaczy dla $m, n \in \mathbb{N}$ mamy, że

$$m + n, m \cdot n \in \mathbb{N}.$$

Zbiór ten jednak nie jest zamknięty na operację odejmowania. Gdy rozważymy wszystkie możliwe różnice elementów zbioru $\mathbb{N}$ otrzymamy zbiór liczb całkowitych:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Widać więc, że

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$$

i można sprawdzić, że w istocie

$$\mathbb{Z} = \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Zbiór liczb całkowitych jest zamknięty na dodawanie, odejmowanie i mnożenie, to znaczy dla $m, n \in \mathbb{Z}$ mamy, że

$$m + n, m - n, m \cdot n \in \mathbb{Z}.$$

Zbiór ten jednak nie jest zamknięty na operację dzielenia. Gdy rozważymy wszystkie możliwe ilorazy elementów zbioru $\mathbb{Z}$ otrzymamy zbiór liczb wymiernych:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

i można zauważyć, że

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Zbiór liczb wymiernych jest zamknięty na dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie (nie przez zero), to znaczy dla $p, q \in \mathbb{Q}$ mamy, że

$$p + q, p - q, p \cdot q \in \mathbb{Q}$$

oraz

$$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

dla $q \neq 0$. W związku z powyższym (oraz z kilku innych przyczyn) $\mathbb{Q}$ jest nazywane *ciałem liczbowym*.

2. Liczby niewymierne. Przez pewien czas ludzie wierzyli, że każda liczba występujaca w naturze jest liczbą wymierną. Ta wiara doprowadziła do poszukiwań liczby wymiernej d, która jest długością przekątnej kwadratu o boku długości 1. Z tw. Pitagorasa wiemy, że takie d spełnia równanie

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

czyli

$$(*) \qquad d^2 = 2.$$

Te poszukiwania skończyły się (strasznym) wnioskiem, że taka (wymierna) liczba d nie istnieje, co zburzyło podstawy ówczesnego światopoglądu.

Poniżej przypomnimy standardowy argument na to, że liczba d spełniająca równanie $(*)$ nie może być wymierna (możemy się ograniczyć do przypadku $d > 0$).

W tym celu zauważmy, że każdą dodatnią liczbę wymierną możemy przedstawić w formie ułamka nieskracalnego $\frac{m}{n}$, gdzie liczby naturalne m, n nie mają wspólnych dzielników (większych od 1).

Załóżmy, że istnieje dodatnia liczba wymierna d spełniająca równanie $(*)$. Wówczas możemy przyjąć, że

$$d = \frac{m}{n},$$

gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ i powyższy ułamek jest nieskracalny.

Skoro d spełnia $(*)$, to otrzymujemy, że

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2,$$

czyli

$$m^2 = 2n^2. \tag{$**$}$$

Z tego wynika, że m^2 jest parzyste, a to pociąga, że m też jest parzyste (bo gdyby m było nieparzyste, to m^2 też by było nieparzyste). Widać więc, że $m = 2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Podstawiając to do $(**)$ otrzymujemy, że

$$4k^2 = 2n^2,$$

czyli

$$2k^2 = n^2.$$

Z tego wynika, że n^2 jest parzyste, a to pociąga, że n też jest parzyste. W tym momencie uzyskujemy, że m, n mają wspólny dzielnik równy 2, co jest **sprzeczne** z nieskracalnością ułamka $\frac{m}{n}$.

W skrócie, założyliśmy, że istnieje dodatnia liczba wymierna d spełniająca równanie $(*)$ i doszliśmy do sprzeczności. To dowodzi, że nie istnieje dodatnia liczba wymierna d spełniająca równanie $(*)$. Taki typ dowodu nazywamy *dowodem nie wprost.*

To, że równanie $(*)$ nie ma rozwiązań wymiernych wcale nie oznacza, że nie ma liczb spełniajacych to równanie. Dziś wiemy już, że równanie $(*)$ ma dwa rozwiązania, które oznaczamy jako

$$d_1 = \sqrt{2} = 1,41\ldots > 0, \quad d_2 = -\sqrt{2} < 0.$$

Powyższe liczby są przykładami liczb niewymiernych. Inne słynne liczby niewymierne to

$$\pi = 3,14\ldots, \quad e = 2,71\ldots.$$

Gdzie π jest definiowane jako iloraz długości obwodu do długości średnicy koła o promieniu 1. Natomiast e jest definiowane jako granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Wiecej o granicach dowiemy się potem. Ogólnie, każda liczba niewymierna wyraża się jako granica ciągu liczb wymiernych.

Aby zaznaczyć, że liczba r jest niewymierna piszemy (trochę nieformalnie), że $r \notin \mathbb{Q}$. Formalny zapis wymaga dodania, że r jest liczbą rzeczywistą. Inne stosowane oznaczenie, to $r \in \mathbb{IQ}$, lub $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ze względu na to, że liczby wymierne są zamknięte na dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, wiadomo jaki wynik dają te operacje, gdy jedna z liczb jest wymierna, a druga niewymierna.

W istocie, jeśli $a \in \mathbb{Q}$, $b \notin \mathbb{Q}$, to

$$a + b, a - b, b - a, a \cdot b\,(a \neq 0), \frac{a}{b}\,(a \neq 0), \frac{b}{a}\,(a \neq 0)$$

są niewymierne.

Natomiast, liczby niewymierne nie są zamknięte na dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Okazuje się, że jeśli $a, b \notin \mathbb{Q}$, to

$$a + b, a - b, a \cdot b, \frac{a}{b}$$

mogą być wymierne lub niewymierne.

W szczególności, problem wykazania niewymierności liczb

$$\pi + e, \quad \pi - e, \quad \pi \cdot e, \quad \frac{\pi}{e}$$

jest tak trudny, że do dziś nie został rozwiązany (udało się jednak pokazać, że liczba e^π jest niewymierna **:)**

3. Liczby rzeczywiste. Liczby wymierne i liczby niewymierne w sumie tworzą zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, który wyobrażamy sobie jako oś liczbową.

Liczby rzeczywiste tworzą ciało liczbowe. W szczególności, dla $a, b \in \mathbb{R}$ mamy, że

$$a + b, a - b, a \cdot b \in \mathbb{R}$$

oraz

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

dla $b \neq 0$.

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $a < b$, przedział otwarty (a, b) to zbiór

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

natomiast przedział domknięty $[a, b]$ to zbiór

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Ważną własnością liczb rzeczywistych i wymiernych jest to, że liczby wymierne leżą "gęsto" w liczbach rzeczywistych. Oznacza to, że w każdym (niepustym) przedziale liczb rzeczywistych znajduje się liczba wymierna.

Ta własność jest jasna o tyle, że gdyby w (niepustym) przedziale (a, b) nie było liczb wymiernych, to musiała by się w nim znajdować liczba niewymierna r. Skoro stwierdziliśmy, że każda liczba niewymierna jest otrzymywana jako granica liczb wymiernych, to korzystając z pojęcia granicy możemy stwierdzić, że jednak musi istnieć liczba wymierna w leżąca tak blisko r, że $w \in (a, b)$.

Ze względu na to, że pojęcie granicy ciągu będzie przedstawione dopiero w dalszej części naszego kursu, poniżej pokażemy powyższą własność bez używania pojęcia granicy ciągu.

Fakt. *Między każdymi dwoma różnymi liczbami rzeczywistymi leży liczba wymierna.*

Dla treningu czytania "krzaczków" warto zauważyć, że ten fakt można zapisać następująco:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : a < b \quad \exists\, c \in \mathbb{Q} : a < c < b$$

Proof. Niech $a < b$ będą liczbami rzeczywistymi. Szukamy liczby wymiernej c leżącej między a i b. Zauważmy, że jeśli a jest ujemne oraz b dodatnie, to za nasze c możemy wziąć liczbę zero. Można więc założyć, że $0 < a < b$ lub $a < b < 0$ (obie liczby są dodatnie lub obie są ujemne).

W przypadku, gdy $0 < a < b$ najpierw znajdujemy liczbę naturalną n taką, że

$$\frac{1}{n} < b - a$$

(to oczywiście robi się bardzo łatwo biorąc dowolne naturalne $n > \frac{1}{b-a}$). To oznacza, że $\frac{1}{n}$ jest mniejsze niż długość przedziału (a, b).

Wyobraźmy teraz sobie, że stoimy na osi liczbowej w punkcie zero i patrzymy w kierunku $+\infty$. Gdzieś w oddali (albo nawet całkiem blisko) majaczy się nam przedział (a, b). Zaczynamy iść w jego kierunku krokami o długości $\frac{1}{n}$. Po pierwszym kroku jesteśmy w punkcie $\frac{1}{n}$, po drugim kroku jesteśmy w punkcie $\frac{2}{n}$ itd. Idąc tak dalej w końcu w m-tym kroku wdeptujemy w przedział (a, b), bo nasz krok jest na tyle mały, że nie możemy przeskoczyć tego przedziału. Dzięki temu za naszą liczbę c możemy wziąć $\frac{m}{n}$ (oczywiście może się zdarzyć, że wdepniemy w ten przedział już w pierwszym, lub drugim kroku i to OK).

Podobny (mądrze mówiąc *analogiczny*) argument działa w przypadku, gdy obie liczby a i b są ujemne. $\square$

Następnie pokażemy, że powyższy Fakt pozwala nam uzyskać następujący

Wniosek. *Między każdymi dwoma różnymi liczbami rzeczywistymi leży liczba niewymierna.*

Dla treningu pisania “krzaczków” ten wniosek można zapisać następująco:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : a < b \quad \exists\, d \notin \mathbb{Q} : a < d < b$$

Proof. To ma być wniosek, czyli pokażemy jak wykorzystać powyższy Fakt. Niech ponownie $a, b \in \mathbb{R}$, gdzie $a < b$. (Szukamy liczby niewymiernej d leżącej między a i b.) Aby wykorzystać Fakt dodajemy do obu tych liczb jakąś liczbę niewymierną, np. $\sqrt{2}$. Z Faktu wiemy, że istnieje jakaś liczba wymierna c leżąca między $a + \sqrt{2}$ i $b + \sqrt{2}$, tzn.

$$a + \sqrt{2} < c < b + \sqrt{2}.$$

Z tego wynika, że

$$a < c - \sqrt{2} < b$$

i dzięki temu za naszą liczbę niewymierną d możemy wziąć $c - \sqrt{2}$ (d jest niewymierna, bo różnica liczby wymiernej c i liczby niewymiernej $\sqrt{2}$ daje liczbę niewymierną).

$\square$

4. Liczby zespolone. Przez pewien czas ludzie wierzyli, że każda liczba występująca w naturze jest liczbą rzeczywistą. Okazało się jednak, że dla opisania zjawisk zachodzących w otaczającym nas świecie potrzebne są liczby zespolone.

Podobnie jak równanie $(*)$ doprowadziło do odkrycia nowych liczb (niewymiernych) występujących w naturze, poniższe równanie doprowadziło do wprowadzenia liczb, które nie są rzeczywiste:

$$z^2 = -1. \tag{$***$}$$

To, że równanie $(***)$ nie ma rozwiązań rzeczywistych wcale nie oznacza, że nie ma liczb spełniajacych to równanie. Podobnie jak w przypadku równania $(*)$ możemy założyć, że równanie $(***)$ ma dwa rozwiązania, które oznaczamy jako

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i.$$

Powyższe liczby są przykładami liczb zespolonych (a nawet urojonych **:)**

W ogólności, ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ definiujemy jako

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Liczby zespolone tworzą więc płaszczyznę i nie występuje w nich schemat porównywania liczb stwierdzający, która liczba jest większa (bądź mniejsza) od drugiej liczby. Więcej o liczbach zespolonych dowiemy się na ostatnim wykładzie z Analizy 1.

Uwaga: Przedstawione w tym wykładzie zbiory liczbowe tworzą następujący łańcuch obrazujący rozwój pojęcia liczb

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$