1-2. Dwumian Newtona.

Szanowni Państwo, poniżej znajdą Państwo podstawowe informacje dotyczące dwumianu Newtona.

1. Symbol Newtona. Przypomnijmy, że dla $n \in \mathbb{N}$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Ponadto przyjmuje się konwencję, że

$$0! = 1.$$

Dla $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, gdzie $k \leq n$ definiujemy symbol Newtona jako

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Wyrażenie $\binom{n}{k}$ czytamy jako "n po k" i jest to liczba możliwości wyboru k elementów ze zbioru n elementów.

Przykładowo, jeśli ze zbioru siedmiu znajomych mamy wybrać trzy osoby, to możemy to zrobić na

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} = 7 \cdot 5 = 35$$

sposobów.

2. Notacja sumacyjna. Notacja sumacyjna służy skrótowemu zapisowi sumy wyrazów ciągu. Niech (a_k) będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Suma n początkowych wyrazów tego ciągu to

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Gdy sumowanie zaczniemy nie od a_1, ale od pewnego wyrazu a_m, to otrzymamy

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Suma n początkowych parzystych wyrazów to

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$

Suma n początkowych nieparzystych wyrazów to

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}.$$

Tą ostatnią sumę można też zapisać jako

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}.$$

Warto też dodać, że sumowanie jest tzw. operacją liniową, to znaczy

$$\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k$$

(gdzie c jest liczbą rzeczywistą) oraz

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

3. Dwumian Newtona. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy następujacy wzór (zwany dwumianem Newtona)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

czyli

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} ab^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^n.$$

Warto zaznaczyć, że ze względu na przemienność dodawania alternatywna wersja tego wzoru to

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

czyli

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

Dla początkowych wartości n powyższy wzór przyjmuje postać

$$(a+b)^1 = a + b,$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Dwumian Newtona pozwala też otrzymać wzór na potęgę różnicy a i b:

$$(a-b)^n = (a + (-b))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Dla początkowych wartości n powyższy wzór przyjmuje postać

$$(a-b)^1 = a - b,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3,$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

4. Własności symbolu Newtona. Podstawowe wzory, które warto znać, to

$$\binom{n}{0} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = n,$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

bo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Ważny jest również następujacy wzór

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

dzięki któremu możemy obliczać symbol Newtona korzystając z tzw. trójkąta Pascala.

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{5}{0} = 1 \quad \binom{5}{1} = 5 \quad \binom{5}{2} = 10 \quad \binom{5}{3} = 10 \quad \binom{5}{4} = 5 \quad \binom{5}{5} = 1$$

itd.

Ponadto warto zauważyć, że

$$\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1} \quad \text{dla } k < \frac{n-1}{2}.$$

W istocie, przekształcając powyższą nierówność otrzymujemy, że

$$\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$k+1 < n-k$$

$$k < \frac{n-1}{2}.$$

Powyższe obliczenia pozwalają też wywnioskować, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} \quad \text{dla } k = \frac{n-1}{2},$$

co może zajść tylko gdy n jest nieparzyste.

5. Przykłady.

Przykład 1. Oblicz

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Korzystając z dwumianu Newtona otrzymujemy, że

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Przykład 2. Oblicz

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

Korzystając z dwumianu Newtona otrzymujemy, że

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \cdot 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n.$$