PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS
Vol. 19, Fasc. 1 (1999), pp. 55–62

UNICITÉ TRAJECTORIELLE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES AVEC TEMPS LOCAL

PAR

YOUSSEF OUKNINE* (MARRAKECH)

Abstract. We study the pathwise uniqueness of a one-dimensional stochastic differential equation driven by white noise and involving local time of the unknown process. We introduce a very weak condition on the diffusion term which is sufficient for the pathwise uniqueness if one considers an equation of the form

$$X_t = x_0 + \int_0^t \int_E \sigma(s, x, X_s)\, W(ds, dx) + \int_{\boldsymbol{R}} L_t^a(X)\, \nu(da),$$

where ν stands for a signed Radon measure on $\boldsymbol{R}$.

1. Introduction. La théorie des mesures martingales a été introduite par Walsh [9]. L'objet de cette théorie est de développer un calcul stochastique adapté analogue à celui de Itô. Le calcul stochastique pour les mesures martingales est développé dans El Karoui et Méléard [2]. L'objet du présent travail est l'étude des équations différentielles stochastiques qui dérivent du bruit blanc, mais dont le drift fait intervenir le temps local de la solution inconnue.

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$ un espace de probabilité et $(E, \mathscr{E})$ un espace de Lusin. W est le bruit blanc sur $\boldsymbol{R}_+ \times E$. Nous nous proposons d'étudier l'unicité trajectorielle des solutions d'équations différentielles stochastiques avec temps local:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \int_E \sigma(s, x, X_s)\, W(ds, dx) + \int_{\boldsymbol{R}} L_t^a(X)\, \nu(da), \tag{1}$$

où σ est une fonction borelienne, et ν désigne une mesure de Radon signée sur $\boldsymbol{R}$. Finalement, si X est une semimartingale continue, nous désignons par $L_t^a(X)$ son temps local (symétrique) au point $a \in \boldsymbol{R}$. $L_t^{a+}(X)$, respectivement $L_t^{a-}(X)$, désigne une version continue à droite (respectivement continue à gauche) du temps local de X.

* Supported by TWAS under contract No. 95-306 RG/MATHS/AF/AC.

Une étude des équations différentielles stochastiques de type

$$X_t = x_0 + \int_0^t \int_E \sigma(s, x, X_s) W(ds, dx) + \int_0^t \int_E b(s, x, X_s) q_s(dx) ds$$

a été entamée par Walsh [9] et El Karoui et Méléard [2]. Ici $q_s(dx)ds$ désigne la mesure intensité du bruit blanc W. Les résultats d'existence et d'unicité sont obtenus, dans le cas des coefficients lipschitziens, par El Karoui et Méléard [2]. Le type d'équations que nous étudions est plus général, en un certain sens, que celles étudiées dans El Karoui et Méléard [2]. Dans la section suivante nous démontrons un résultat assez général sur l'unicité trajectorielle des solutions. Pour cela nous introduisons une condition très générale, dite (LT), suffisante pour l'unicité des solutions de l'équation (1). La condition (LT) a été introduite par Barlow et Perkins dans [1] afin d'étudier les équations différentielles stochastiques ordinaires. Cette technique est reprise par Le Gall [3]. Dans le cas des équations différentielles stochastiques ordinaires avec temps local, les résultats définitifs sont obtenus par Rutkowski [7]. Notre démarche est fortement inspirée par cette dernière référence.

2. Unicité trajectorielle des solutions. D'une façon générale, nous adoptons le langage et les notations habituelles du calcul stochastiques par rapport aux martingales-mesures introduit par Walsh [9] et développé dans El Karoui et Méléard [2].

Soit $\sigma: \boldsymbol{R}_+ \times E \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ une fonction borelienne. Nous introduisons la condition (LT).

DÉFINITION 2.1. Nous disons que σ vérifie la *condition* (LT), si lorsque X^1 et X^2 sont des semimartingales continues telles que

$$X_t^i = x_0 + \int_0^t \int_E \sigma(s, x, X_s^i) W(ds, dx) + A_t^i \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

où les processus A^i, $i = 1, 2$, sont à variation finie, alors

$$L_t^{0+}(X^1 - X^2) = 0 \quad \text{pour tout } t \geqslant 0.$$

Il convient d'introduire la notation suivante:

$$N_\sigma = \{a \in \boldsymbol{R}: \sigma(s, x, a) = 0,\ q_s(dx)ds \text{ presque partout}\},$$

où $q_s(dx)ds$ désigne l'intensité du bruit blanc W.

Nous sommes en mesure de formuler le résultat principal de cette section.

THÉORÈME 2.2. *Supposons que σ vérifie la condition* (LT). *Soit ν une mesure de Radon signée sur $\boldsymbol{R}$ telle que la mesure $\tilde{\nu} = I_{N_\sigma^c}\nu$ vérifie*

$$|\tilde{\nu}(\{a\})| < 1 \quad \textit{pour tout } a \in \boldsymbol{R}.$$

Alors il y'a unicité trajectorielle des solutions de l'équation (1).

Pour la preuve de ce théorème, nous avons besoin de deux lemmes.

LEMME 2.3. *Supposons que σ vérifie la condition* (LT), *et soit X une semi-martingale vérifiant la relation*

$$X_t = x_0 + \int_0^t \int_E \sigma(s, x, X_s) W(ds, dx) + A_t.$$

Alors pour tout $a \in N_\sigma$ on a: $L_t^{a+}(X) = L_t^{a-}(X) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$ et par conséquent $L_t^a(X) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$.

Démonstration. Si $a \in N_\sigma$, le processus $t \to \int_0^t \int_E \sigma(s, x, a) W(ds, dx)$ est une martingale continue, nulle en zéro, et dont la variation quadratique vaut

$$\int_0^t \int_E \sigma^2(s, x, a) q_s(dx) ds = 0.$$

Il en résulte que

$$\int_0^t \int_E \sigma(s, x, a) W(ds, dx) = 0$$

et par suite:

$$a = x_0 + \int_0^t \int_E \sigma(s, x, a) W(ds, dx) + (a - x_0).$$

La condition (LT) implique alors que $L_t^{0+}(X-a) = L_t^{0-}(X-a) = 0$, soit

$$L_t^{a+}(X) = L_t^{a-}(X) = 0 \quad \text{pour tout } t \geqslant 0. \blacksquare$$

LEMME 2.4. *Sous les hypothèses du théorème 2.2, toute solution X de l'équation* (1) *vérifie l'équation différentielle stochastique suivante*:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \int_E \sigma(s, x, X_s) W(ds, dx) + \int_{\boldsymbol{R}} L_t^a(X) \tilde{\nu}(da). \tag{2}$$

Démonstration. En vue du lemme précédent on obtient

$$X_t = x_0 + \int_0^t \int_E \sigma(s, x, X_s) W(ds, dx) + \int_{\boldsymbol{R}} I_{N_\sigma^c} L_t^a(X) \nu(da),$$

d'où l'équation, car $\tilde{\nu} = I_{N_\sigma^c} \nu$.

Démonstration du théorème 2.2. En vue du lemme 2.4, il suffit de prouver l'unicité trajectorielle des solutions de l'équation (2), où ν est une mesure de Radon signée sur $\boldsymbol{R}$, telle que $|\nu(\{a\})| < 1$ pour tout $a \in \boldsymbol{R}$. Par localisation, on peut supposer que $|\nu|(\boldsymbol{R}) < +\infty$. On utilise une transformation de type Zvonkin, introduite par Stroock et Yor [8]:

$$F_\nu(x) = \int_0^x \exp(-2\nu^c(]-\infty, u])) \prod_{z \leqslant u} \left(\frac{1-\nu(\{z\})}{1+\nu(\{z\})}\right) du.$$

La fonction F_ν est différence de deux fonctions convexes. Par la formule de

Tanaka, l'équation (1) peut être transformée en une équation sans drift

$$Y_t = y_0 + \int_0^t \int_E \tilde{\sigma}(s, x, Y_s)\, W(ds, dx), \tag{3}$$

où $Y_t = F_v(X_t)$ et $\tilde{\sigma}(s, x, a) = \sigma(s, x, F_v^{-1}(a))F_v'(F_v^{-1}(a))$.

L'unicité des solutions de l'équation (1) découlera alors de l'unicité trajectorielle des solutions de l'équation (3). En effet, soient X^1 et X^2 deux solutions de l'équation (1) définies sur le même espace de probabilité relativement au même bruit blanc. La condition (LT) imposée à la fonction σ entraîne que $L_t^{0+}(X^1 - X^2) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Il existe deux constantes strictement positive m et M telles que

$$m(x-y) \leqslant F_v(x) - F_v(y) \leqslant M(x-y)$$

pour $0 \leqslant x-y \leqslant 1$. En utilisant un résultat sur la comparaison des temps locaux dans Ouknine [4], on a si $Y_t^i = F_v(X_t^i)$ pour $i = 1, 2$

$$L_t^{0+}(Y^1 - Y^2) \leqslant M L_t^{0+}(X^1 - X^2)$$

et par suite

$$L_t^{0+}(Y^1 - Y^2) = 0 \qquad \text{pour tout } t \geqslant 0.$$

Or, $Y^1 - Y^2$ est une martingale locale continue et nulle en zéro. Par conséquent, $Y^1 = Y^2$. Par suite X^1 et X^2 sont indistinguables. ∎

3. Quelques conditions suffisantes pour (LT). La condition (LT) a joué un rôle central dans notre étude. Il est donc naturel de chercher des hypothèses suffisantes pour la réaliser. La classe des fonctions qui satisfont (LT) contient les fonctions hölderiennes d'ordre supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Comme nous allons le voir, c'est une condition très faible, et même certaines fonctions discontinues peuvent satisfaire (LT). Donnons nous un ensemble de conditions:

(C_1) Il existe une fonction croissante $\varrho\colon [0, 1] \to \boldsymbol{R}_+$ vérifiant:

$$\int_{0+} \frac{du}{\varrho(u)} = +\infty$$

telle que

$$\int_E \big(\sigma(s, x, a) - \sigma(s, x, b)\big)^2 q_s(dx) \leqslant \varrho(|a-b|).$$

(C_2) Il existe une fonction croissante f telle que

$$\int_E \big(\sigma(s, x, a) - \sigma(s, x, b)\big)^2 q_s(dx) \leqslant |f(a) - f(b)|$$

et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\int_E \sigma(s, x, a)\, q_s(dx) > \varepsilon$ pour tout $s \geqslant 0$ et $a \in \boldsymbol{R}$.

(C_3) Il existe une fonction à variation bornée f, et une fonction $h \in W_\alpha^{0,1}$ ($W_\alpha^{0,1}$ désigne l'espace de Sobolev classique) telles que

$$\int_E \big(\sigma(s, x, a) - \sigma(s, x, b)\big)^2 q_s(dx) \leqslant \varrho_1\big(|f(a) - f(b)|\big) + \varrho_2\big(|h(a) - h(b)|\big),$$

où les fonctions ϱ_i $(i = 1, 2)$ sont croissantes, $\varrho_1(x)/x$ et $\varrho_2(x)/x^\alpha$ sont décroissantes, et

$$\int_{0+} \frac{du}{\varrho_1(u) \vee \varrho_2(u)} = +\infty,$$

et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\int_E \sigma(s, x, a) q_s(dx) > \varepsilon$ pour tout $s \geqslant 0$ et $a \in \boldsymbol{R}$.

PROPOSITION 3.1. *Chacune des conditions* (C_1), (C_2) *et* (C_3) *implique la condition* (LT).

Démonstration. Nous pouvons supposer que la fonction ϱ est strictement croissante dans un petit intervalle $[0, \delta]$, $\delta > 0$, sinon c'est trivial. Montrons que

$$\int_0^t \frac{d\langle X^1 - X^2 \rangle_s}{\varrho(X_s^1 - X_s^2)} I_{X_s^1 - X_s^2 > 0} < +\infty \qquad \text{pour tout } t \geqslant 0.$$

En effet, en utilisant la condition (C_1), on a

$$\int_0^t \frac{d\langle X^1 - X^2 \rangle_s}{\varrho(X_s^1 - X_s^2)} I_{X_s^1 - X_s^2 > 0}$$

$$= \int_0^t \frac{\int_E (\sigma(s, x, X_s^1) - \sigma(s, x, X_s^2))^2 q_s(dx)}{\varrho(X_s^1 - X_s^2)} I_{X_s^1 - X_s^2 > 0} ds \leqslant t.$$

Par la formule de densité d'occupation, il vient

$$\int_0^t \frac{d\langle X^1 - X^2 \rangle_s}{\varrho(X_s^1 - X_s^2)} I_{X_s^1 - X_s^2 > 0} = \int_{0+} \frac{L_t^u(X^1 - X^2)\, du}{\varrho(u)}.$$

La condition

$$\int_{0+} \frac{du}{\varrho(u)} = +\infty$$

et la continuité à droite du temps local (à droite) assurent que $L_t^{0+}(X^1 - X^2) = 0$.

Pour montrer que (C_2) implique la condition (LT), on régularise la fonction croissante f en la convolant avec une fonction positive régulière. Par localisation, on peut supposer que f est bornée. Nous allons montrer que

$$I = \int_0^t \frac{d\langle X^1 - X^2 \rangle_s}{X_s^1 - X_s^2} I_{X_s^1 - X_s^2 > 0} < +\infty \qquad \text{pour tout } t \geqslant 0.$$

Si D désigne l'ensemble des points de discontinuité de la fonction f, D est au plus dénombrable et

$$\int_0^\infty I_{\{X_s^1 \in D\}} ds = \int_0^\infty I_{\{X_s^2 \in D\}} ds = 0.$$

Par suite,

$$I \leqslant \int_0^t \frac{f(X_s^1) - f(X_s^2)}{X_s^1 - X_s^2} I_{X_s^1 - X_s^2 > 0} ds \leqslant \limsup_{n \to \infty} \int_0^t \frac{f_n(X_s^1) - f_n(X_s^2)}{X_s^1 - X_s^2} I_{X_s^1 - X_s^2 > 0} ds,$$

mais

$$\int_0^t \frac{f_n(X_s^1)-f_n(X_s^2)}{X_s^1-X_s^2} I_{X_s^1-X_s^2>0}\, ds \leqslant \int_0^t \int_0^1 f_n'\big(\alpha X_s^1+(1-\alpha)X_s^2\big)\, d\alpha\, ds$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 \int_{\boldsymbol{R}} f_n'(u)\, L_t^u\big(\alpha X^1+(1-\alpha)X^2\big)\, du\, d\alpha$$

et il en résulte que

$$E(I) \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{\varepsilon^2} \sup_{u,\alpha} E L_t^u\big(\alpha X^1+(1-\alpha)X^2\big) < +\infty.$$

Donc I est fini presque sûrement, et par suite

$$\int_{0+} \frac{L_t^u(X^1-X^2)\, du}{u} < +\infty \text{ p.s.}$$

et on conclut de la même façon que dans le cas (C_1).

Enfin, il faut noter que les fonctions qui satisfont la condition (C_2) ne sont pas necessairement continues.

La démonstration de la condition (LT) sous la condition (C_3) se fait de la même manière qu'en (C_2), en approchant (f, h) par une suite (f_n, h_n) de classe C^1 telle que

$$\sup_n \Big[\int_{\boldsymbol{R}} |f_n'(x)|\, dx + \int_{\boldsymbol{R}} |h_n'(x)|^\alpha\, dx\Big] < +\infty,$$

ce qui possible d'après les hypothèses faites sur (f, h).

Remarque 3.2. Lorsque l'espace E est de cardinal fini, disons $E=\{a_1, \ldots, a_n\}$, on pose

$$B_t = \left(\frac{1}{\sqrt{q_t(a_i)}}\, W_t(\{a_i\})\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \quad \text{et} \quad \sigma(s, a_i, x) = \sigma_i(s, x).$$

L'équation stochastique (1) prend la forme habituelle

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s + \int_{\boldsymbol{R}} L_t^a(X)\, \nu(da).$$

Dans une série d'articles Ouknine [4], [5], Ouknine et Rutkowski [6], nous avons étudié le cas où E est réduit à un seul point.

Remarque 3.3. Lorsque la mesure ν est absolument continue, $\nu(da) = g(a)\, da$, l'équation (1) prend la forme

$$X_t = x_0 + \int_0^t \int_E \sigma(s, x, X_s)\, W(ds, dx) + \int_0^t \int_E \sigma^2(s, x, X_s)\, g(X_s)\, q_s(dx)\, ds,$$

qui est le cas classique traité dans Walsh [9] et El Karoui et Méléard [2] avec drift

$$c(s, x, a) = \sigma^2(s, x, a)\, g(a).$$

L'objet de la suite est de donner quelques résultats d'unicité pour les équations de type:

$$(4) \qquad X_t = x_0 + \int_0^t \int_E \sigma(s, x, X_s)\, W(ds, dx) + \int_0^t \int_E b(s, x, X_s)\, q_s(dx)\, ds.$$

On suppose dans toute la suite que la fonction b est mesurable et

$$\int_E |b(s, x, a)|\, q_s(dx) \leqslant C(1+|a|).$$

Le résultat principal est le

THÉORÈME 3.4. *Supposons que σ vérifie la condition* (LT). *On suppose de plus que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée*:

(A) *il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|\sigma| > \varepsilon$;*

(B) *b est lipschitzienne dans le sens où*

$$\int_E |b(s, x, u) - b(s, x, v)|\, q_s(dx) \leqslant C|u-v|.$$

Alors il y'a unicité trajectorielle des solutions de l'équation (4).

Démonstration. Sous la condition (A), il y'a unicité en loi des solutions. En effet, on utilise le théorème de Girsanov pour nous ramener au cas $b = 0$. La condition $|\sigma| > \varepsilon$ assure cette unicité en loi. Soient X^1 et X^2 deux solutions de l'équation (4) définies sur le même espace de probabilité relativement au même bruit blanc W. La condition (LT) imposée à la fonction σ entraîne que $L_t^{0+}(X^1 - X^2) = 0$. En écrivant $\sup(X^1, X^2) = (X^1 - X^2)^+ + X^2$ et une écriture analogue pour le minimum de deux solutions, et en utilisant la formule de Tanaka, on vérifie facilement que $\sup(X^1, X^2)$ et $\min(X^1, X^2)$ sont également solutions de l'équation (4). Par unicité en loi on a $X^1 = X^2$. Sous la condition (B), on développe $|X^1 - X^2|$ par la formule de Tanaka également et on obtient

$$\begin{aligned} E|X_t^1 - X_t^2| &= E \int_0^t \int_E \operatorname{sgn}(X_s^1 - X_s^2)\big(b(s, x, X_s^1) - b(s, x, X_s^2)\big)\, q_s(dx)\, ds \\ &\leqslant CE \int_0^t |X_s^1 - X_s^2|\, ds. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall donne le résultat. ∎

Dans toute la suite, on se restreint au cas où σ ne dépend pas explicitement du temps et la mesure intensité du bruit blanc est de la forme $q(dx)\, ds$. Sous la condition (LT), l'équation (1) s'écrit:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \int_E \sigma(x, X_s)\, W(ds, dx) + \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\int_E (\sigma(x, a))^2\, q(dx)}\, I_{N_\sigma^c}\, L_t^a(X)\, \nu_\sigma(da),$$

où

$$\int_{\mathbf{R}} f(a)\, \nu_\sigma(da) = \int_{\mathbf{R}} \int_E f(a)\, (\sigma(x, a))^2\, q(dx)\, \nu(da)$$

pour toute fonction positive et à support compact f. On est en mesure d'énoncer l'équivalence des équations (1) et (4).

PROPOSITION 3.5. *Supposons que σ est localement bornée et vérifie la condition* (LT). *Si la mesure $v_\sigma(da)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue da*

$$v_\sigma(da) = b(a)\,da$$

et la fonction b admet une version localement bornée, alors l'équation (1) *est équivalente à l'équation suivante*:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \int_E \sigma(x, X_s)\,W(ds, dx) + \int_0^t I_{N_\sigma^c}(X_s)\,b(X_s)\,ds.$$

La preuve est immédiate. ∎

REFERENCES

[1] M. T. Barlow and E. A. Perkins, *One-dimensional stochastic differential equations involving a singular increasing process*, Stochastics 12 (1984), pp. 229–249.

[2] N. El Karoui and S. Méléard, *Martingale measures and stochastic calculus*, Probab. Theory Related Fields 84 (1990), pp. 83–101.

[3] J. F. Le Gall, *Temps locaux et équations différentielles stochastiques*, Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI (1982).

[4] Y. Ouknine, *Généralisation d'un lemme de S. Nakao et applications*, Stochastics 23 (1988), pp. 149–157.

[5] — *Quelques identités sur les temps locaux et unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques avec reflexion*, Stochastic Process. Appl. 48 (1993), pp. 335–340.

[6] — and M. Rutkowski, *Strong comparison of solutions of one-dimensional stochastic differential equations*, ibidem 36 (1990), pp. 217–230.

[7] M. Rutkowski, *Stochastic differential equations with singular drift*, Statist. Probab. Lett. 10 (1990), pp. 225–229.

[8] D. W. Stroock and M. Yor, *Some remarkable martingales*, Lecture Notes in Math. 850, Springer, Berlin 1981, pp. 590–603.

[9] J. B. Walsh, *An introduction to stochastic partial differential equations*, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour, XIV (1984), Springer.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Semlalia
B.P. S15, Marrakech 40000
Maroc

Received on 11.12.1997;
revised version on 30.9.1998