PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS
Vol. 1, Fasc. 2 (1980), p. 185-195

ОБ ОЦЕНКАХ ДЛЯ УСРЕДНЕННОГО КВАДРАТИЧНОГО РИСКА

А. А. БОРОВКОВ и А. И. САХАНЕНКО (НОВОСИБИРСК)

Abstract. In the case of a weighted squared error loss we present a simple method of obtaining lower bounds for risk functions of estimators. The obtained lower bounds are asymptotically optimal.

Пусть $X_n = (x_1, \ldots, x_n)$ есть выборка из распределения P_θ, принадлежащего параметрическому семейству $\{P_t, t \in \Theta\}$, где Θ есть открытое множество из $(-\infty, \infty)$. Наблюдения x_i принимают значения в измеримом выборочном пространстве с мерой μ, относительно которой все P_t абсолютно непрерывны. Обозначим

$$f(t, x) = \frac{dP_t}{d\mu}(x), \quad p(t, X_n) = \prod_{i=1}^{n} f(t, x_i),$$

и предположим, что $f(t, x)$ μ-почти всюду дифференцируема по t. Условимся, что далее всюду штрих обозначает производную по t, что M_t есть математическое ожидание по распределению P_t, и что интегралы берутся по всему пространству, соответствующему переменной интегрирования, если не указана область интегрирования. Чтобы избежать тривиальных затруднений, мы будем полагать, что математические ожидания от неотрицательных случайных величин, когда они не существуют, равны бесконечности, и что $c/\infty = 0/0 = 0$ для всех вещественных c. Обозначим

$$I(t) = M_t\left(\frac{f'(t, x_1)}{f(t, x_1)}\right)^2$$

и предположим, что функция $\sqrt{I(t)}$ интегрируема на любом ограниченном интервале из Θ. Все пределы берутся при $n \to \infty$.

При выполнении известных условий регулярности (см., напр., [3]), для оценки θ^* справедливо неравенство Рао-Крамера

$$M_t(\theta^*-t)^2 \geqslant b^2(t)+\frac{[1+b'(t)]^2}{nI(t)}, \qquad b(t) = M_t\theta^*-t, \tag{1}$$

которое для несмещенных оценок дает

$$M_t(\theta^*-t)^2 \geqslant \frac{1}{nI(t)}.$$

Нас будут интересовать оценки для

$$R(\theta^*) = \int M_t(\theta^*-t)^2 q(t)\,dt \qquad \left(q(t)\geqslant 0,\ \int q(t)\,dt = 1\right),$$

не зависящие от θ^* и, во возможности, близкие к A/n, где

$$A = \int \frac{q(t)}{I(t)}\,dt.$$

Можно отметить два метода, которые применялись при решении этой задачи. Это, во-первых, оценивание минимума по b для выражения

$$\int \left\{b^2(t)+\frac{[1+b'(t)]^2}{nI(t)}\right\} q(t)\,dt$$

(см., напр., [5]), которое получится, если взять правую часть в (1). Этот подход приводит к сложной задаче при $q(t) \neq \mathrm{const}$, $I(t) \neq \mathrm{const}$. Второй метод является асимптотическим и связан с использованием асимптотического представления для байесовской оценки

$$\tilde\theta = \frac{\int tp(t, X_n)q(t)\,dt}{\int p(t, X_n)q(t)\,dt},$$

для которой

$$R(\tilde\theta) = \min_{\theta^*} R(\theta^*).$$

Наилучший результат на этом пути (технически еще более сложном) принадлежит, по-видимому, Гусеву [2] (там же можно найти обзор предшествующих результатов), который, при выполнении некоторых условий гладкости для $q(t)$ и $f(t, x)$, получил

$$R(\tilde\theta) = \frac{A}{n}\left(1-O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{2}$$

Некоторые результаты в этом направлении получены также Бурнашевым в [1].

Ниже мы предлагаем очень простой способ получения неравенств снизу для $R(\theta^*)$, асимптотически неулучшаемых, минуя сложный анализ в том его виде, в котором он присутствует, скажем, в [2] и [5].

Символом M мы будем обозначать математическое ожидание по распределению с плотностью $p(t, X)\,q(t)$, соответствующему паре (θ, X_n), когда θ случайно и имеет распределение в $(-\infty, \infty)$ с плотностью $q(t)$. Обозначим через S носитель этого последнего распределения:

$$S = \{t\colon\ q(t) > 0\}.$$

Теорема 1. *Пусть $K(t, X)$ измеримая по обеим переменным функция такая, что для μ^n-почти всех X*

$$\int_S K(t, X)\,dt = 0. \tag{3}$$

Тогда если $M|\theta G(\theta, X_n)| < \infty$, где

$$G(t, X) = \frac{K(t, X)}{p(t, X)\,q(t)},$$

то

$$R(\theta^*) \equiv M(\theta^* - \theta)^2 \geqslant \frac{[M\theta G(\theta, X_n)]^2}{MG^2(\theta, X_n)}. \tag{4}$$

Доказательство. Если $M(\theta^* - \theta)^2 = \infty$ или $MG^2(\theta, X_n) = \infty$, то (4) очевидно верно. Если же оба указанные значения конечны, то $M|\theta^* - \theta|\,|G(\theta, X_n)| < \infty$ в силу неравенства Шварца и, стало быть, $M|\theta^* G(\theta, X_n)| < \infty$. Отсюда вытекает существование всех интегралов в следующем соотношении, использующем (3):

$$M\theta^* G(\theta, X_n) = \int \theta^* \int_S K(t, X)\,dt\,\mu^n(dX) = 0.$$

Применяя теперь неравенство Шварца, получаем

$$[M\theta G(\theta, X_n)]^2 = [M(\theta^* - \theta) G(\theta, X_n)]^2 \leqslant M(\theta^* - \theta)^2 MG^2(\theta, X_n),$$

откуда немедленно вытекает требуемое утверждение.

Отметим, что основное условие (3) инвариантно относительно домножения $K(t, X)$ на произвольную измеримую функцию $K(X)$.

Теорема 2. *Пусть функция $h'(t)$ такова, что*

$$\int h'(t)\,dt = 0. \tag{5}$$

Положим $h(t) = \int_{-\infty}^{t} h'(u)\,du$ и предположим, что

$$\int (1 + |t|)\left(\sqrt{I(t)}\,|h(t)| + |h'(t)|\right) dt < \infty,$$

$$\{t\colon\ |h(t)|\,I(t) + |h'(t)| > 0\} \subset S = \{t\colon\ q(t) > 0\},$$

и что для μ^n-почти всех X

(6) $$p(t, X)h(t) \to 0 \quad \text{при } |t| \to \infty,\ t \in \Theta.$$

Тогда

(7) $$R(\theta^*) \geqslant \frac{\big(Mh(\theta)\big)^2}{nMI(\theta)h^2(\theta)/q^2(\theta) + M\big(h'(\theta)\big)^2/q^2(\theta)}.$$

Замечание. Все условия на $h(t)$ и $h'(t)$ будут, очевидно, выполнены, если $h(t)$ есть финитная дифференцируемая функция, носитель которой содержится в носителе S функции $q(t)$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1 при

$$K(t, X) = p'(t, X)h(t) + p(t, X)h'(t) = \big(p(t, X)h(t)\big)'$$

и заметим, что в этом случае $G(t, X)$ можно представить в виде

$$G(t, X) = L'(t, X)\frac{h(t)}{q(t)} + \frac{h'(t)}{q(t)},$$

где

$$L'(t, X) = \frac{p'(t, X)}{p(t, X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(t, x_i)}{f(t, x_i)}.$$

В силу неравенства Шварца получаем

$$M_t|L'(t, X_n)| \leqslant n\sqrt{I(t)},$$

откуда вытекает, что

(8) $$\begin{aligned} M|\theta G(\theta, X_n)| &\leqslant n\int |t|\sqrt{I(t)}\,|h(t)|\,dt + \int |th'(t)|\,dt < \infty, \\ \int |K(t, X)|\,\mu^n(dX)\,dt &\leqslant n\int \sqrt{I(t)}\,|h(t)|\,dt + \int |h'(t)|\,dt < \infty. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует, что $\int K(t, X)\,dt$ существует при μ^n-почти всех X, а потому, пользуясь (6), получаем

$$\int K(t, X)\,dt = \int \big(p(t, X)h(t)\big)'\,dt = 0.$$

Отсюда и из (8) вытекает, что при выбранном $K(t, X)$ выполнены все условия теоремы 1, а потому справедливо (4).

Нам осталось привести правую часть (4) к виду (7). Заметим сначала, что

(9) $$M_t L'(t, X_n) = 0 \text{ п.в.}$$

Чтобы доказать это, возьмем произвольную функцию $f(t)$, обращающуюся в нуль вне некоторого ограниченного интервала из Θ и имеющую всюду непрерывную производную $f'(t)$. Имеем

$$\int |f(t)|\,M_t|L'(t, X_n)|\,dt \leqslant n\int |f(t)|\sqrt{I(t)}\,dt < \infty.$$

Отсюда следует, что при μ^n-почти всех X справедливо

$$\int f(t)p'(t, X)\,dt = -\int f'(t)p(t, X)\,dt,$$

и что можно менять порядок интегрирования в следующем выражении:

$$\int f(t)M_t L'(t, X_n)\,dt = \int f(t)p'(t, X)\,dt\,\mu^n(dX) =$$
$$= -\int f'(t)p(t, X)\mu^n(dX)\,dt = -\int f'(t)\,dt = 0.$$

Выполнение последнего равенства при всех возможных $f(\cdot)$ эквивалентно (9).

Используя (9), получаем

$$MG^2(\theta, X_n) = \int\limits_S \frac{nI(t)h^2(t) + (h'(t))^2}{q(t)}\,dt,$$

$$M\theta G(\theta, X_n) = \int th'(t)\,dt = \int h(t)\,dt,$$

где последнее равенство вытекает из (5).

Теорема доказана.

Нетрудно заметить, что неравенство (7) превращается в равенство тогда и только тогда, когда найдутся такие константа C и функция $B(X)$, что

$$p(\theta, X)h(\theta) = B(X)\exp\left[C\int\limits_0^\theta (\theta^* - t)\frac{q(t)}{h(t)}\,dt\right].$$

Есть, по крайней мере, два пути получения из доказанных теорем оценок для $R(\theta^*)$, удовлетворяющих (2). Можно, во-первых, положить в теореме 1

$$K(t, X) = \frac{(p(t, X)q(t))'}{I(\hat{\theta})},$$

где $\hat{\theta}$ — некоторая состоятельная оценка параметра θ. Во-вторых, можно положить $h(t) = q(t)/I(t)$ в теореме 2. Мы остановимся на второй возможности.

Теорема 3. *Если функция $h_0(t) = q(t)/I(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то*

$$R(\theta^*) \geqslant \frac{A}{n}\left(1 + \frac{H}{nA}\right)^{-1} \geqslant \frac{A}{n} - \frac{H}{n^2}, \tag{10}$$

где

$$H = \int\limits_S \frac{[(q(t)/I(t))']^2}{q(t)}\,dt.$$

Это утверждение немедленно вытекает из теоремы 2. Сравнение с (2) показывает неулучшаемость полученной оценки (10).

Следует отметить также, что выбор функции $h(t)$, при которой правая часть в (7) достигает минимума, приводит в рассматриваемом случае к оценке, отличающейся от (10) лишь на слагаемое $o(1/n^2)$. В случае, когда $I(t) = Cq(t)$ при $t \in S$, где C — некоторая постоянная, можно найти явный вид функции $h(t)$, на которой достигается указанный минимум. Нетрудно проверить, что требуемой будет функция

$$h(t) = \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{nC}}{2}\right) - \operatorname{ch}\left(\sqrt{nC}\left(\int_{-\infty}^{t} q(u)\,du - \frac{1}{2}\right)\right). \tag{11}$$

В частности, если $q(t)$ есть плотность равномерного распределения на $[0, 1]$, то из (7) и (11) вытекает (ср. с [5])

$$R(\theta^*) \geqslant \frac{1}{Cn} - \frac{2}{(Cn)^{3/2}} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{Cn}}{2}\right) \geqslant \frac{1}{Cn} - \frac{2}{(Cn)^{3/2}}.$$

Если теперь функция $h_0(t) = q(t)/I(t)$ не удовлетворяет условиям теоремы 2 или $H = \infty$, то можно попытаться подобрать последовательность $h_n(t)$ близких к $h_0(t)$ функций, для которых эти условия выполнены. На этом пути полезным может оказаться следующее утверждение:

Теорема 4. *Если функция $h_n(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2, то*

$$R(\theta^*) \geqslant \frac{A}{n} - \frac{1}{n}\left(\Delta_n + \frac{1}{n} H_n\right),$$

где

$$\Delta_n = \int \frac{(h_0(t) - h_n(t))^2}{h_0(t)}\,dt, \qquad H_n = \int \frac{(h_n'(t))^2}{q(t)}\,dt.$$

Доказательство. При $C_n = \int (h_n(t) - h_0(t))\,dt$, из представления $h_n(t) = h_0(t) + (h_n(t) - h_0(t))$ немедленно вытекает, что

$$\int h_n(t)\,dt = A + C_n,$$

$$\int I(t) \frac{h_n^2(t)}{q(t)}\,dt = A + 2C_n + \Delta_n.$$

Используя теперь теорему 2 при $h(t) = h_n(t)$, нетрудно убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$R(\theta^*) \geqslant \frac{(A + C_n)^2}{n(A + 2C_n + \Delta_n) + H_n} \geqslant \frac{A}{n} - \frac{1}{n}\left(\Delta_n + \frac{1}{n} H_n\right).$$

Теорема 5. *Если функция $q(t)$ интегрируема по Риману и $A < \infty$, то*

$$R(\theta^*) \geqslant \frac{A}{n}(1+o(1)).$$

Доказательство. Положим $\varepsilon = n^{-1/5}$,

$$q_n(t) = \min_{|u|\leqslant\varepsilon} q(t+u) \leqslant q(t), \qquad I_n(t) = \max\{\varepsilon, I(t)\} \geqslant \varepsilon,$$

$$h_n(t) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{q_n(v)}{I_n(v)}\,dv \leqslant h_0(t).$$

Поскольку

$$\Delta_n = \int \frac{\left(h_0(t)-h_n(t)\right)^2}{h_0(t)}\,dt \leqslant \int \left(h_0(t)-h_n(t)\right)dt,$$

$$\int h_n(t)\,dt = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} du \int \frac{q_n(t+u)}{I_n(t+u)}\,dt = \int \frac{q_n(t)}{I_n(t)}\,dt$$

и $q_n(t)/I_n(t) \nearrow h_0(t)$ п.в. в силу интегрируемости по Риману, то

$$\Delta_n \leqslant \int h_0(t)\,dt - \int \frac{q_n(t)}{I_n(t)}\,dt \to 0.$$

Кроме того

$$|h_n'(t)| = \frac{1}{2\varepsilon}\left|\frac{q_n(t+\varepsilon)}{I_n(t+\varepsilon)} - \frac{q_n(t-\varepsilon)}{I_n(t-\varepsilon)}\right| \leqslant \frac{q(t)}{\varepsilon^2},$$

$$H_n \leqslant \varepsilon^{-4}\int q(t)\,dt = \varepsilon^{-4} = n^{4/5}.$$

Требуемое утверждение следует из теоремы 4, ибо

$$\Delta_n + \frac{1}{n}H_n \to 0.$$

Теорема 6. *Пусть функция $h_0(t) = q(t)/I(t)$ почти всюду дифференцируема и непрерывна всюду, за исключением конечного числа точек $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, в которых функции $q(t)$ и $I(t)$ имеют конечные пределы слева и справа, а $I(t)$ положительна. Предположим, что $h_0(t)$ и $h_0'(t)$ удовлетворяют всем остальным условиям теоремы 2, кроме (5), и что $H < \infty$. Тогда*

$$R(\theta^*) \geqslant \frac{A}{n} - \frac{C}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

где

$$C = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(h_0(a_j-0)-h_0(a_j+0)\right)^2}{h_0(a_j-0)\sqrt{I(a_j-0)}+h_0(a_j+0)\sqrt{I(a_j+0)}}.$$

Доказательство. Переопределим функцию h_0 в точках $a_1, a_2, \ldots, a_k$, полагая

$$h_0(a_j) = \frac{h_0(a_j+0)h_0(a_j-0)\left(\sqrt{I(a_j+0)}+\sqrt{I(a_j-0)}\right)}{h_0(a_j-0)\sqrt{I(a_j-0)}+h_0(a_j+0)\sqrt{I(a_j+0)}}.$$

Обозначим

$$q_j^\pm = q(a_j\pm 0), \quad I_j^\pm = I(a_j\pm 0), \quad h_j^\pm = h_0(a_j\pm 0),$$

$$\delta_j^\pm = h_0(a_j\pm 0)-h_0(a_j), \quad \psi_j^\pm(u) = \exp\left(-u\sqrt{nI_j^\pm}\right), \quad u \geqslant 0,$$

$$\varphi_j^\pm(u) = \frac{\psi_j^\pm(u)-\psi_j^\pm(\varepsilon(n))}{1-\psi_j^\pm(\varepsilon(n))}, \quad 0 < u \leqslant \varepsilon(n),$$

где $\varepsilon(n) = \min\{n^{-1/4}, \varepsilon\}$, а число $\varepsilon > 0$ выбрано таким образом, чтобы интервалы $(a_1-\varepsilon, a_1+\varepsilon), \ldots, (a_k-\varepsilon, a_k+\varepsilon)$ не пересекались. Введем в рассмотрение непрерывную функцию $h_n(t)$, полагая

$$h_n(t) = \begin{cases} h_0(t)\,\delta_j^\pm\varphi_j^\pm(u) & \text{при } t = a_j\pm u, \ 0 < u \leqslant \varepsilon(n), \ q_j^\pm > 0, \\ h_0(t) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что при $q_j^\pm > 0$

$$\Delta_{nj}^\pm \equiv \int_0^{\varepsilon(n)} \frac{(h_n(t)-h_0(t))^2}{h_0(t)}\bigg|_{t=a_j\pm u} du =$$

$$= (1+o(1))\int_0^{\varepsilon(n)} \frac{\left(\delta_j^\pm\psi_j^\pm(u)\right)^2}{h_j^\pm}du = \frac{(\delta_j^\pm)^2(1+o(1))}{2\sqrt{n}\,h_j^\pm\sqrt{I_j^\pm}},$$

$$(H_{nj}^\pm)^{1/2} \equiv \left(\int_0^{\varepsilon(n)} \frac{(h_n'(t))^2}{q(t)}\bigg|_{t=a_j\pm u} du\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^{\varepsilon(n)} \frac{(h_n'(t)-h_0'(t))^2}{q(t)}\bigg|_{t=a_j\pm u} du\right)^{1/2} + \left(\int_0^{\varepsilon(n)} \frac{(h_0'(t))^2}{q(t)}\bigg|_{t=a_j\pm u} du\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{(\delta_j^\pm)^2\sqrt{n}(1+o(1))}{2h_j^\pm\sqrt{I_j^\pm}}\right)^{1/2} + O(1).$$

Суммируя и используя тот факт, что $\Delta_{nj}^\pm = 0$, а $H_{nj}^\pm \leqslant H$ при $q_j^\pm = 0$, получаем

$$\Delta_n + \frac{1}{n}H_n \leqslant \frac{1}{n}H + \sum_{j=1}^{k}\left(\Delta_{nj}^+ + \Delta_{nj}^- + \frac{1}{n}H_{nj}^+ + \frac{1}{n}H_{nj}^-\right) = \frac{C}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Требуемое утверждение следует теперь из теоремы 4.

Следствие. *Если $I(t) \equiv 1$, а функция $q(t)$, удовлетворяющая всем условиям теоремы 6, равна нулю вне интервала $[0, 1]$ и имеет разрывы лишь на границах этого интервала, то*

$$R(\theta^*) \geqslant \frac{1}{n} - \frac{c\big(q(+0)+q(1-0)\big)}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \quad \text{при } c = 1. \tag{12}$$

Для сравнения укажем, что если выполнены все условия следствия и $f(t, x)$ есть плотность нормального распределения с параметрами $(t, 1)$, то (см. [4]) $\min\limits_{\theta^*} R(\theta^*)$ имеет вид (12) при

$$c = \int \frac{\big(\Phi'(t)\big)^2}{\Phi(t)}\, dt \approx 0{,}91,$$

где $\Phi(t)$ — функция распределения нормального закона с параметрами $(0, 1)$.

Теорема 7. *Пусть функция $h_0(t) = q(t)/I(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 (но $H = \infty$) и существует конечное число точек $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ таких, что*

$$H(\delta) \equiv \int\limits_{S(\delta)} \frac{\big(h_0'(t)\big)^2}{q(t)}\, dt < \infty \quad \text{при всех } \delta > 0,$$

где множество $S(\delta)$ получается вычитанием из S всех интервалов вида $(a_j - \delta, a_j]$, если $h_0'(a_j - 0) \neq 0$, и интервалов $[a_j, a_j + \delta)$, если $h_0'(a_j + 0) \neq 0$. Предположим, что $q(t)$ обращается в нуль в точках $a_1, a_2, \ldots, a_k$, а функции $h_0'(t)$ и $I(t)$ в этих точках непрерывны слева и справа, причем $I(t)$ положительна. Тогда

$$R(\theta^*) \geqslant \frac{A}{n} - C\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),$$

где

$$C = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{|h_0'(a_j-0)|}{I(a_j-0)} + \frac{|h_0'(a_j+0)|}{I(a_j+0)}\right].$$

Доказательство. Очевидно, что при выполнении условий теоремы можно найти такую последовательность $\varepsilon(n)$, что интервалы $\big(a_1 - \varepsilon(n), a_1 + \varepsilon(n)\big), \ldots, \big(a_k - \varepsilon(n), a_k + \varepsilon(n)\big)$ не пересекаются и

$$\varepsilon(n) \to 0, \quad n\varepsilon^2(n) \to \infty, \quad H\big(\varepsilon(n)\big) = o(\ln n).$$

Обозначим

$$q_j^\pm = q(a_j \pm 0), \quad I_j^\pm = I(a_j \pm 0), \quad h_j^\pm = h_0'(a_j \pm 0),$$
$$\psi_j^\pm(u) = (1 + nI_j^\pm u^2)^{-1}, \quad u > 0.$$

Введем в рассмотрение непрерывную функцию $h_n(t)$, полагая

$$h_n(t)=\begin{cases} h_0(t)\dfrac{1-\psi_j^{\pm}(u)}{1-\psi_j^{\pm}(\varepsilon(n))} & \text{при } t=a_j\pm u,\ 0<u\leqslant\varepsilon(n),\ h_j^{\pm}\neq 0,\\ h_0(t) & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что при $h_j^{\pm}\neq 0$ и $t=a_j\pm u$, $0<u\leqslant\varepsilon(n)$ справедливо

$$q(t)=h_0(t)I(t)=|h_j^{\pm}|I_j^{\pm}u(1+o(1)),$$

$$\begin{aligned} h_n'(t)&=[h_0'(t)(1-\psi_j^{\pm}(u))+h_0(t)\cdot 2uI_j^{\pm}n(\psi_j^{\pm}(u))^2](1+o(1))=\\ &=[h_j^{\pm}I_j^{\pm}u^2n\psi_j^{\pm}(u)+|h_j^{\pm}|u\cdot 2nI_j^{\pm}n(\psi_j^{\pm}(u))^2](1+o(1))=\\ &=h_j^{\pm}I_j^{\pm}u^2n\psi_j^{\pm}(u)\bigl(1+o(1)+O(\psi_j^{\pm}(u))\bigr).\end{aligned}$$

Далее, при $h_j^{\pm}\neq 0$

$$\begin{aligned}\varDelta_{n_j}^{\pm}&\equiv\int\limits_0^{\varepsilon(n)}\frac{(h_n(t)-h_0(t))^2}{h_0(t)}\bigg|_{t=a_j\pm u}du=\\ &=(1+o(1))\int\limits_0^{\varepsilon(n)}\frac{(h_j^{\pm}u\psi_j^{\pm}(u))^2}{|h_j^{\pm}|u}du=O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_{n_j}^{\pm}&\equiv\int\limits_0^{\varepsilon(n)}\frac{(h_n'(t))^2}{q(t)}\bigg|_{t=a_j\pm u}du=(1+o(1))\int\limits_0^{\varepsilon(n)}\frac{(h_j^{\pm}I_j^{\pm}u^2n\psi_j^{\pm}(u))^2}{|h_j^{\pm}|I_j^{\pm}u}du+O(1)=\\ &=\frac{|h_j^{\pm}|(1+o(1))}{I_j^{\pm}}\ln(1+nI_j^{\pm}\varepsilon^2(n))+O(1)\leqslant\frac{|h_j^{\pm}|\ln n(1+o(1))}{I_j^{\pm}}.\end{aligned}$$

Суммируя и используя соотношения $\varDelta_{n_j}^{\pm}=0$ и $H_{n_j}^{\pm}\leqslant H(\varepsilon(n))$, справедливые при $h_j^{\pm}=0$, получаем

$$\varDelta_n+\frac{1}{n}H_n\leqslant\frac{1}{n}H(\varepsilon(n))+\sum_{j=1}^{k}\left(\varDelta_{n_j}^{+}+\varDelta_{n_j}^{-}+\frac{1}{n}H_{n_j}^{+}+\frac{1}{n}H_{n_j}^{-}\right)=\frac{C\ln n}{n}(1+o(1)).$$

Требуемое утверждение немедленно вытекает из теоремы 4.

В заключение получим минимаксные оценки.

Теорема 8. *Если интервал $(a-\delta, a+\delta)$ содержится в Θ, то*

$$\min_{\theta^*}\max_{t\in(a-\delta,a+\delta)}M_t(\theta^*-t)^2\geqslant\left(n\max_{t\in(a-\delta,a+\delta)}I(t)+\pi^2\delta^{-2}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством

$$\max_{t\in(a-\delta,a+\delta)}M_t(\theta^*-t)^2\geqslant\int\limits_{a-\delta}^{a+\delta}M_t(\theta^*-t)^2q(t)\,dt,$$

справедливым для любой плотности $q(t)$, обращающейся в нуль вне интервала $(a-\delta, a+\delta)$. Требуемое утверждение немедленно следует из теоремы 2, если положить в ней

$$h(t) = q(t) = \frac{1}{\delta}\cos^2\frac{\pi(t-a)}{2\delta}, \qquad |t-a| \leqslant \delta.$$

(На этой функции достигает минимума в классе дифференцируемых плотностей q функционал $\int\limits_{a-\delta}^{a+\delta}\left[(q'(t))^2/q(t)\right]dt$.)

Из теоремы вытекает, в частности, что интервал значений t, при которых оценка θ^* может быть сверхэффективной, имеет длину не большую, чем $o(1/\sqrt{n})$.

Заметим также, что в правой части неравенства в теореме 8 величину $\max\limits_{t\in(a-\delta,a+\delta)} I(t)$ можно заменить более точным выражением

$$\int\limits_{a-\delta}^{a+\delta} I(t)\frac{1}{\delta}\cos^2\frac{\pi(t-a)}{2\delta}\,dt.$$

Мы видели, что доказательства приведенных утверждений чрезвычайно просты и занимают лишь немногим больший объем, чем их формулировки. Это обстоятельство является весьма существенным с методологической точки зрения, так как позволяет, например, быстро устанавливать свойства асимптотической оптимальности оценок максимального правдоподобия (в частности, их близость к байесовским оценкам).

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Бурнашев, *Асимптотические разложения интегрального риска статистических оценок параметра сдвига в схеме независимых наблюдений*, Докл. Акад. наук СССР 247 (1979), стр. 783-786.

[2] С. И. Гусев, *Асимптотические разложения, связанные с некоторыми статистическими оценками в гладком случае. II*, Теор. вероятност. и применен. 21 (1976), стр. 16-33.

[3] Ш. Закс, *Теория статистических выводов*, изд-во „Мир", Москва 1975.

[4] И. А. Ибрагимов и Р. З. Хасьминский, *Об оценке среднего в нормальной совокупности*, Проблемы передачи информации 10 (2) (1974), стр. 64-74.

[5] Н. Н. Ченцов, *Об оценке неизвестного среднего многомерного нормального распределения*, Теор. вероятност. и применен. 12 (1967), стр. 619-633.

СССР .630090.
Новосибирск-90
Институт Математики

Received on 14. 11. 1979