

MATEMATYKA OBLICZENIOWA
LISTA ZADAŃ 4 - UKŁADY LINIOWE 1

7.04.2025

1. Zapisz następującą macierz w postaci LU , gdzie L jest dolnie trójkątna (z 1 na przekątnej) a U jest górnio trójkątna:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Zapisz tą macierz w postaci LL^T , gdzie L jest dolnie trójkątna.

2. Napisz funkcje `usolve` oraz `lsolve`, które rozwiązują układy trójkątne $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ oraz $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3. Niech

$$\begin{pmatrix} 10^{-16} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Rozwiąż układ liniowy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dokładnie.
- Rozwiąż układ numerycznie, ale *bez pivotingu*.
- Rozwiąż układ numerycznie, ale *z pivotingiem*.

4. Załóżmy, że macierz A spełnia $PA = LU$, gdzie

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Użyj tych danych, bez obliczania macierzy A , ani żadnych odwrotnych, do rozwiązania układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{b} = (2, 10, -12)^T$.

5. Napisz procedurę znajdującą rozkład $A = LU$ z użyciem *partial pivotingu*, a następnie użyj tej procedury do rozwiązania układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Wykorzystaj napisane wcześniej procedury `usolve` i `lsolve`.
6. Ile operacji arytmetycznych jest potrzebnych do:
- Dodania dwóch n -wektorów?
 - Pomnożenia $m \times n$ macierzy przez n -wektor?
 - Rozwiązania układu górnio trójkątnego $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$?
7. Oszacuj ilość operacji arytmetycznych potrzebnych do eliminacji Gaussa z *partial pivotingiem* na macierzy m -diagonalnej ($a_{i,j} = 0$ dla $|i - j| > m$).