

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 9

2.12.2024

1. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{7x} - 1}{x} & : x \neq 0, \\ 7 & : x = 0. \end{cases}$$

Oblicz $f'(0)$.

2. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos(x) - 1} & : x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ A & : x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

3. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 3e^x + 2}{x^2} & : x \neq 0, \\ A & : x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

4. Oblicz pochodną rzędu 3 funkcji f danej wzorem:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & (x+1)^6, & \text{(b)} \quad x^6 - 4x^3 + 4, & \text{(c)} \quad \frac{1}{1-x}, \\ \text{(d)} & x^3 \log x, & \text{(e)} \quad e^{2x-1}, & \text{(f)} \quad (x^2+1)^3, \\ \text{(g)} & e^{x^2}, & \text{(h)} \quad \log(x^2), & \text{(i)} \quad (x-7)^{50}. \end{array}$$

5. Wyprowadź wzór na pochodną rzędu n funkcji f danej wzorem:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \log(x^{10}), & \text{(b)} \quad x \log(x), & \text{(c)} \quad \sqrt{x}, \\ \text{(d)} & \sin^2(x), & \text{(e)} \quad \frac{1-x}{1+x}, & \text{(f)} \quad xe^x, \\ \text{(g)} & \sin(5x), & \text{(h)} \quad x^7, & \text{(i)} \quad e^{4x}, \\ \text{(j)} & x + \frac{1}{x}, & \text{(k)} \quad x^2 e^{-x}. \end{array}$$

6. Udowodnij, że

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

7. Oblicz przybliżone wartości następujących liczb korzystając trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranej szeregu Taylora. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \sqrt{24}, & \text{(b)} \quad \sqrt[3]{126}, & \text{(c)} \quad \sqrt[7]{126}, \\ \text{(d)} & \sin\left(\frac{1}{10}\right), & \text{(e)} \quad \arctan\left(\frac{1}{10}\right), & \text{(f)} \quad \sqrt{50}. \end{array}$$