

# ANALIZA MATEMATYCZNA

## LISTA ZADAŃ 5

4.11.2024

1. Oblicz sumy częściowe  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , a następnie znajdź  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ :

(a)  $a_k = \frac{1}{5^k}$ ,      (b)  $a_k = \frac{2^k + 5^k}{10^k}$ .

2. Udowodnij, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$  jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

3. Rozstrzygnij, czy następujące szeregi są zbieżne ( $k!!$  oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych nie większych od  $k$  o tej samej parzystości):

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ ,

(b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ ,

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2 + 1}$ ,

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$ ,

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 1}{n^3 + 6n^2 + 8n + 47}$ ,

(f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$ ,

(g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$ ,

(h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$ ,

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ ,

(j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ ,

(k)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ ,

(l)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$ ,

(m)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ ,

(n)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^3}}{3^n}$ ,

(o)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}}$ ,

(p)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ ,

(q)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ ,

(r)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ ,

(s)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$ ,

(t)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n - n}}$ ,

(u)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}}$ ,

(v)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + \arctan n}$ ,

(w)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}}$ ,

(x)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \pi}{n^\pi + e}$ .

4. Które z następujących szeregów są zbieżne, a które są zbieżne absolutnie:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1},$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3},$

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}},$

(g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot (-5)^n}{n^n \cdot 2^n},$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n},$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n + 1}{n},$

(f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}},$

(h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n},$

(i)  $1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + 1 - \overbrace{\frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \dots - \frac{1}{k}}^{k \text{ razy}} + \dots,$

(j)  $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k} - \overbrace{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \dots - \frac{1}{k^2}}^{k \text{ razy}} + \dots,$

(k)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}},$

(m)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 77n}{n^2},$

(o)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!+1}}{n!},$

(q)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} (-1)^n,$

(s)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{4^n+3^n}},$

(u)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!},$

(w)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}},$

(y)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n},$

(z)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctan n},$

(l)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!},$

(n)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 17}{3^n},$

(p)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}},$

(r)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right),$

(t)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 5\sqrt{n} + 27},$

(v)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{4^{\binom{n}{2}}},$

(x)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n},$

(z)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\log n)^{\log n} (-1)^n}{n^{\log \log n}},$

(ż)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) (-1)^n.$