ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 3

21.10.2024

1. Wyznacz dziedziny naturalne następujących funkcji:
   (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$, (b) $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$,
   (c) $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$, (d) $f(x) = \log(x^2 - 4)$,
   (e) $f(x) = \log(1 - 2\cos x)$, (f) $f(x) = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

2. Zapisz wzorem $y = f(x)$ złożenie następujących funkcji, i wyznacz dziedzinę naturalną złożenia:
   (a) $t = 2^x,\ z = \sqrt[3]{t+1},\ y = z^2$, (b) $t = \sin x,\ z = \log t,\ y = \sqrt{1 + z^2}$.

3. Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem ($[\dots]$ oznacza część całkowitą, a $\{\dots\}$ oznacza część ułamkową):
   (a) $f(x) = |x+1| + |x-1|$, (b) $f(x) = |x-3| - 2|x+1| + 2|x| - x + 1$,
   (c) $f(x) = x^3 + 3x^2$, (d) $f(x) = -x^3 + 2x - 2$,
   (e) $f(x) = 1 - \sin x$, (f) $f(x) = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$,
   (g) $f(x) = |\sin x|$, (h) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$,
   (i) $f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$, (j) $f(x) = |x^2 - 8x + 15|$,
   (k) $f(x) = x^2 + x + 2 - |x^2 - x - 2|$, (l) $f(x) = \{\cos x\}$,
   (m) $f(x) = [\frac{4}{\pi}\arctan x]$, (n) $f(x) = 2\{\sin x\} - \{2\sin x\}$.

4. Znajdź funkcje odwrotne do:
   (a) $f(x) = 1 - 3x$, (b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x},\ x \neq 1$,
   (c) $f(x) = x^2 - 2x,\ x \geq 1$, (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1},\ x \geq 0$,

5. Ciąg Fibonacciego określony jest rekurencyjnie w sposób następujący: $F_1 = F_2 = 1$, a następnie $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Znajdź wyrazy ciągu Fibonacciego o numerach od 3 do 12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość: $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

6. Udowodnij, **korzystając jedynie z definicji**, zbieżność ciągów, znajdując ich granice:
   (a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, (b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$,
   (c) $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, (d) $a_n = \dfrac{n+2}{n-1},\ n \geq 2$,
   (e) $a_n = \dfrac{1}{1 + \sqrt{n}}$, (f) $a_n = \dfrac{3n^3 - 2n^2 - 7n + 5}{4n^3 + n - 6}$.

7. Udowodnij, że jeśli x jest liczbą rzeczywistą o rozwinięciu dziesiętnym

$$\beta, \alpha_1\alpha_2\cdots,$$

   to ciąg określony wzorem

$$a_n = \beta, \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

   jest zbieżny do x (, jest punktem dziesiętnym, a $\beta \in \mathbb{Z}$).

8. Udowodnij, że granica sumy (różnicy, ilorazu) ciągów zbieżnych jest sumą (różnicą, ilorazem) ich granic. Oczywiście w przypadku ilorazu zakładamy, że ciąg w mianowniku ma wyrazy różne od zera, i że jego granica jest różna od zera.

9. Zbadaj monotoniczność następujących ciągów:

   (a) $a_n = n + \frac{1}{n}$, (b) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n^2 - 2$,

   (c) $a_n = \sqrt[n]{n!}$, (d) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

   (e) $a_n = \frac{2^n}{n!}$, (f) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}$.

10. Oblicz granice (być może niewłaściwe) ciągów:

   (a) $a_n = \frac{7n + (\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3 + 7n + 3}$, (b) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$,

   (c) $a_n = \frac{\sin n}{n}$, (d) $a_n = r^n,\ r > 1$,

   (e) $a_n = \sqrt[n]{r},\ 0 < r < 1$, (f) $a_n = 2^n - \frac{1}{n}$,

   (g) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 2}$, (h) $a_n = \frac{1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n}{1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n}$,

   (i) $a_n = \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots - 2n}{\sqrt{n^2 + 2}}$, (j) $a_n = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$,

   (k) $a_n = \frac{1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n}{3^n}$, (l) $a_n = \sqrt{3^n + 2^n}\sqrt{3^n + 1}$,

   (m) $a_n = \sqrt[(n^2)]{n}$, (n) $a_n = \sqrt[n]{n^2}$,

   (o) $a_n = n(\sqrt{n^2 + 7} - n)$, (p) $a_n = \frac{n^2 + n + 1}{(n + \sin n)^2}$,

   (q) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1} + \frac{n^2 + 2}{n^3 + 2} + \frac{n^2 + 3}{n^3 + 3} + \cdots + \frac{n^2 + n}{n^3 + n}$,

   (r) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}$,

   (s) $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+7} - \sqrt{n}}$, (t) $a_n = r^n,\ -1 < r < 1$.

11. Wypisz wzorem ciąg, dla którego $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, i każdy z wyrazów jest średnią harmoniczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right), \quad n \geq 2.$$

12. Wypisz wzorem ciąg, dla którego $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, i każdy z wyrazów jest średnią geometryczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$