ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 1

7.10.2024

1. Przedstaw liczbę $0,1(270)$ w postaci ułamka zwykłego.
2. Pokaż, że rozwinięcie
$$x = 0,1234567891011121314151617181920212223\ldots$$
złożone z kolejnych liczb naturalnych reprezentuje liczbę niewymierną.
3. Podaj trzy pierwsze cyfry po przecinku liczby $\sqrt[3]{7}$.
4. Pokaż, że liczby $\sqrt{24}$ i $\sqrt[5]{10}$ są niewymierne.
5. Udowodnij że zbiór liczb całkowitych nie jest ograniczony ani od góry ani od dołu.
6. Podaj przykład liczby x takiej że:
(a) $0 < x < 1$ i x jest niewymierna,
(b) $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ i x jest wymierna,
(c) x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,
(d) x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,
(e) $(x+1)^2$ jest niewymierna,
7. Korzystając z definicji znajdź kresy górny i dolny odcinka otwartego $(1, 2)$.
8. Znajdź kresy górny i dolny zbioru
$$\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}; n, k \in \mathbb{N}\right\}.$$
9. Znajdź kresy górny i dolny zbioru
$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$
złożonego z odwrotności kolejnych liczb naturalnych.
10. Znajdź kresy górny i dolny zbioru
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$
11. Udowodnij, że liczba $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ jest niewymierna.
12. Udowodnij, że liczba $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{6}$ jest niewymierna.
13. Udowodnij, że każdym przedziale otwartym (a, b) istnieje liczba niewymierna.
14. Udowodnij, że dowolne liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność
$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$
15. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prawdziwa jest nierówność
$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$
16. Znajdź kresy górny i dolny zbioru
$$\{x + y : \ x, y > 0, \ [x] + [y] = 3\}.$$

17. Wykaż, że
$$\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \quad \min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2},$$
gdzie $\max\{x,y\}$ oznacza większą z liczb x i y, a $\min\{x,y\}$ mniejszą z tych liczb.

18. Pokaż, że $|a-b-c| \geq |a|-|b|-|c|$

19. Niech $x = 1,0234107...$, $y = 1,0235106...$ Czy jest prawdą, że
(a) $1,02 < x \leq 1,03$?
(b) $x+y > 2,04692$?
(c) $x < y$?

20. Rozwiąż następujące równania i nierówności:
(a) $|x+1| = |x-1|$,
(b) $|1-2x| + |2x-6| = x$,
(c) $|3x| + 2 \leq |x-6|$,
(d) $|x^2-25| \leq 24$,
(e) $|x| + |x+1| + |x+2| = x^2 + 2x + \frac{29}{9}$,
(f) $|x+10| = |2x+1| + 3$,
(g) $\dfrac{6-2x}{3+x} > 2$,
(h) $0 < \dfrac{2x-1}{x-1} < 2$,
(i) $\dfrac{2x-1}{x+4} < \dfrac{x}{x+4} < \dfrac{x+1}{x+4}$.

21. Czy jest prawdą, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność:
(a) $x \leq |x|$,
(b) $-x \leq x$,
(c) $1 \leq |1+x| + x$,
(d) $-1 \leq |-1+x| + x$,
(e) $1 \leq |1-x| + x$,
(f) $-1 \leq |-1-x| + x$,
(g) $x \leq |x+1| + 1$,
(h) $-x \leq |-x+1| + 1$,
(i) $x \leq |x-1| + 1$,
(j) $-x \leq |-x-1| + 1$.

22. Udowodnij następujący wzór:
$$1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3^3 + 5\cdot 3^4 + \cdots + n\cdot 3^{n-1} = \frac{2n-1}{4}\cdot 3^n + \frac{1}{4}.$$

23. Udowodnij następujący wzór (dla $q \neq 1$):
$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

24. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że:
$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}\cdot b + \cdots + a\cdot b^{n-2} + b^{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

25. Udowodnij następujący wzór:
$$1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4 + \cdots + n\cdot 2^{n-1} = (n-1)\cdot 2^n + 1.$$