Wstęp do matematyki R

Lista przygotowawcza przed kolokwium nr 2 (do pracy samodzielnej)

1. Zapisz formalnie poniższe zdania i funkcje zdaniowe.
 (a) Każda liczba rzeczywista różni się o mniej niż $\frac{1}{2}$ od pewnej liczby całkowitej.
 (b) Jeśli liczba x jest dodatnia, to nie jest najmniejszą liczbą całkowitą.
 (c) Nie każda liczba naturalna ma dwa różne dzielniki nieparzyste.
 (d) Liczba x dzieli każdą liczbę parzystą większą od 10.
 (e) Każda parzysta liczba naturalna jest wielokrotnością pewnej nieparzystej liczby naturalnej.

2. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach:
 (a) f nie jest funkcją stała i $f \circ f$ jest funkcją stałą;
 (b) $f \circ f$ nie jest funkcją stała i $f \circ f \circ f$ jest funkcją stałą.

3. Podaj przykład funkcji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takich, że $(\forall x \in \mathbb{R}) g \circ f(x) \neq f \circ g(x)$.

4. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, która jest różnowartościowa.

5. Podaj przykład funkcji $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$, która jest „na".

6. Dla podanych poniżej funkcji sprawdź, czy są $1-1$ i czy są „na".
 (a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad f(x, n) = x^n$;
 (b) $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}); \quad f(X) = X \cap \{-x : x \in X\}$.

7. Niech $f : X \to Y$ i niech funkcja $g : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ będzie zadana wzorem $g(B) = f^{-1}[B]$. Pokaż, że funkcja g jest $1-1$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest „na".

8. Dana jest funkcja $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^+$ określona wzorem $g(n, k) = 2^n + 3^k - 1$. Czy funkcja g jest $1-1$? Czy funkcja g jest „na"? Odpowiedzi uzasadnij.

9. Niech $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ będą dwiema różnymi funkcjami. Czy jeśli dla każdego $x \in \mathbb{Z}$ mamy $f(g(x)) = g(f(x))$, to funkcje f i g są wzajemnie odwrotne?

10. Niech $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ oraz $A \subseteq X$ i $B \subseteq Z$. Udowodnij, że:
 (a) $(g \circ f)[A] = g[f[A]]$,
 (b) $(g \circ f)^{-1}[B] = f^{-1}[g^{-1}[B]]$.

11. Niech $f : X \to Y$ i niech $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ będzie rozłączną rodziną zbiorów. Wykaż, że rodzina $\{f^{-1}[A_i] : i \in \mathbb{N}\}$ jest również rozłączna.

12. Niech $f : X \to Y$. Niech $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Sprawdź, czy $f[A \cap f^{-1}[B]] = f[A] \cap B$.

13. Rozważamy relacje R, S i T na niepustym zbiorze X. Czy $R \subseteq S \Longrightarrow T \circ R \subseteq T \circ S$?

14. Rozważmy relacje R i S na zbiorze $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}$ zdefiniowane następująco:
 $xRy \Leftrightarrow 5 | (x^2 - y^2), \qquad xSy \Leftrightarrow xy \neq 8$.
 (a) Uzasadnij, że R jest, a S nie jest relacją równoważności.
 (b) Wyznacz $A/_R$.
 (c) Czy relacja $R \cap S$ jest relacją równoważności? Odpowiedź uzasadnij.

15. Czy złożenie dwóch relacji zwrotnych musi być relacją zwrotną? Czy złożenie dwóch relacji przeciwzwrotnych może być relacją zwrotną? Odpowiedzi uzasadnij.

16. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2$. Na zbiorze $\mathbb{R}$ określamy relację równoważności R warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow \text{zbiory } f^{-1}[\{x\}] \text{ i } f^{-1}[\{y\}] \text{ mają tyle samo elementów.}$$

(a) Wyznacz $[0]_R, [-1]_R$ i $[1]_R$.
(b) Wyznacz $\mathbb{R}/_R$.

17. Rozważmy relację równoważności R na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadaną warunkiem

$$A\,R\,B \Leftrightarrow A \setminus \mathbb{N}^+ = B \setminus \mathbb{N}^+.$$

(a) Czy $[\mathbb{N}]_R \cap [\mathbb{N}^+]_R \neq \emptyset$? Odpowiedzi uzasadnij.
(b) Wyznacz $[\{1\}]_R$.
(c) Wyznacz $\mathcal{P}(\mathbb{N})/_R$.

18. Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych. Niech S będzie relacją równoważności na zbiorze $\mathbb{N}^+$ zadaną warunkiem

$$xSy \Leftrightarrow (\forall p \in \mathbb{P})(p|x \Leftrightarrow p|y).$$

(a) Czy $[10]_S = [15]_S$? Odpowiedź uzasadnij.
(b) Czy zbiór $\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$ jest klasą abstrakcji relacji S? Odpowiedź uzasadnij.
(c) Wyznacz $[6]_S$.

Wskazówka: Spróbuj **zrozumieć**, kiedy dwie liczby są ze sobą w relacji S.