# Wstęp do matematyki R

## Lista przygotowawcza przed kolokwium nr 1
## (do pracy samodzielnej)

**1**. Zapisz poniższe zbiory stosując opis zbioru za pomocą **funkcji zdaniowej**:
(a) Zbiór wszystkich parzystych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3.
(b) Zbiór wszystkich par uporządkowanych liczb całkowitych, których obie współrzędne są tej samej parzystości.
(c) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, należących do którejś z osi współrzędnych.
(d) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, należących wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadanej wzorem $f(x) = x^2$.
(e) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych, do których nie należy ani liczba 17, ani liczba 117.
(f) Zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych o dodatnim wyrazie wolnym.
(g) Zbiór wszystkich symetrycznych macierzy $2 \times 2$ o współczynnikach rzeczywistych (zbiór macierzy $2 \times 2$ o współczynnikach rzeczywistych oznaczamy jako $\mathcal{M}_{2\times 2}[\mathbb{R}]$).

**2**. Zapisz poniższe zbiory stosując opis zbioru za pomocą **operacji** oraz (być może) operację **sumy** zbiorów:
(a) Zbiór wszystkich parzystych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3.
(b) Zbiór wszystkich par uporządkowanych liczb całkowitych, których obie współrzędne są nieparzyste.
(c) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, należących do którejś z osi współrzędnych.
(d) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, należących wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadanej wzorem $f(x) = x^2$.
(e) Zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych stopnia co najwyżej 2.

**3**. Niech $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$ i $C = \{1, 5\}$. Znajdź zbiór $X$, dla którego zachodzi równość $(A \triangle X) \triangle B = C$.

**4**. Rozważmy zbiór $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ taki, że

$$\langle n, N\rangle \in A \Leftrightarrow n \in N.$$

Wyznacz cięcie $A_5$. Wykaż, że dla każdego $N \subseteq \mathbb{N}$ mamy $A^N = N$ (Tutaj, oczywiście, $A^N$ jest cięciem poziomym zbioru $A$ w $N$).

**5**. Mamy dane zbiory
$A = \{x^2 - 1 : x \in \mathbb{Z}\} \cap [-1, 3)$,
$B = \{x \in \mathbb{Z} : x > -2 \wedge \neg\, x^2 \geq 4\}$.
Wyznacz zbiór $\Big(\mathcal{P}(A) \triangle (\mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset\})\Big) \times (B \setminus A)$.

**6**. Niech $A = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x \wedge |x - 1| \leq 4\}, B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 9\}$.
(a) Wyznacz zbiór $(B \setminus A) \times \mathcal{P}(A \setminus B)$.
(b) Czy istnieje niepusty zbiór $X \subseteq \mathbb{Z}$ taki, że $A \times X = X \times B$?

**7**. Niech $A$ i $B$ będą **różnymi** zbiorami.
(a) Udowodnij, że warunek

$$\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$$

jest warunkiem koniecznym do tego, by $A \cap B = \emptyset$.
(b) Czy warunek

$$\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$$

jest warunkiem wystarczającym do tego, by $A \cap B = \emptyset$? Odpowiedź uzasadnij.

**8**. Niech $A, B, C, D$ będą dowolnymi zbiorami, takimi że $A, B \neq \emptyset$ oraz

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D.$$

Wykaż, że $A = B = C = D$.

**Wskazówka**: to nie jest takie proste, jak może się wydawać.