Wstęp do matematyki R

Lista zadań nr 13 (na ćwiczenia 24.01.2025).

Ćwiczenia

1. Niech R będzie relacją równoważności na niepustym zbiorze X. Udowodnij, że $|X/_R| \leq |X|$.

2. Pokaż, że obraz zbioru przeliczalnego względem dowolnej funkcji jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Czy to samo można powiedzieć o przeciwobrazie?

3. Niech $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$. Wskaż zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $|P \cap X| = |X \setminus P| = |\mathbb{N} \setminus X| = \aleph_0$. Odpowiedź uzasadnij.

4. Udowodnij, że funkcje $f, g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadane wzorami

$$f(n,k) = \tfrac{(n+k)(n+k+1)}{2} + k \text{ i } g(n,k) = 2^n(2k+1) - 1$$

są bijekcjami.

5. Zbiór A jest nieprzeliczalny, a zbiór B przeliczalny. Co można powiedzieć o mocy zbioru $A \setminus B$?

6. Zbiory A i B są mocy continuum oraz $B \subseteq A$. Co można powiedzieć o mocy zbioru $A \setminus B$?

Zadania

7. Pokaż, że poniższe zbiory są co najwyżej przeliczalne.
   (a) $\mathbb{N} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.
   (b) $\mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.
   (c) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{N})$.
   (d) Zbiór $\mathcal{A}$ wszystkich kół na płaszczyźnie o środkach w punktach o obu współrzędnych wymiernych i promieniach, których długość jest liczbą wymierną.
   (e) Zbiór parami rozłącznych kwadratów na płaszczyźnie.
   (f) $\{D \subseteq \mathbb{N} : |\mathbb{N} \setminus D| < \aleph_0\}$.
   (g) Zbiór wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych stopnia 5.
   (h) $\{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{N})\, y = \ln x\}$.

Które z tych zbiorów są przeliczalne? Które mogą być przeliczalne?

8. Jak dużej mocy może być rodzina parami rozłącznych podzbiorów zbioru liczb naturalnych?

9. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = \sin x$. Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, takiego że $|f^{-1}[A]| = \aleph_0$. Odpowiedź krótko uzasadnij.

10. Udowodnij, że następujące zbiory mają moc continuum.
   (a) $A \times B$, gdzie A ma moc continuum, a B jest przeliczalny.
   (b) $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
   (c) Koło na płaszczyźnie, o środku w punkcie $\langle 0, 0\rangle$ i promieniu 1.
   (d) Okrąg na płaszczyźnie, o środku w punkcie $\langle 0, 0\rangle$ i promieniu 1.
   (e) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \vee y \in \mathbb{Q}\}$.
   (f) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : \mathbb{N} \subseteq A\}$.
   (g) $\{A \subseteq \mathbb{N} : 0 \in A\}$.
   (h) $\{\langle x, y\rangle \in (0,1) \times (1, +\infty) : x^y \in \mathbb{Q}\}$.

11. Co umiemy powiedzieć o mocy poniższych zbiorów? Odpowiedź uzasadnij.
   (a) $\mathbb{Q} \cup [0,1]$.
   (b) $[0,1] \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\right\}$.
   (c) $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$.
   (d) Zbiór wszystkich niemalejących funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
   (e) Zbiór wszystkich nierosnących funkcji $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$.

12. Jaka jest największa możliwa moc łańcucha w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$?