Wstęp do matematyki R

Lista zadań nr 12 (na ćwiczenia 17.01.2025).

Ćwiczenia

1. Dla podanych zbiorów A i B znajdź funkcję ustalającą równoliczność między nimi oraz sprawdź, że jest ona faktycznie bijekcją.
   (a) $A = \{3n+1 : n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{6n+1 : n \in \mathbb{N}\}$;
   (b) $A = \mathbb{N}^+, \quad B = \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 5k\}$;
   (c) $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}, \quad B = \mathbb{R}$;
   (d) $A = (0, 1), \quad B = (-2, +\infty)$;
   (e) $A = (-\infty, 3], \quad B = [-2, 1)$;
   (f) $A = \left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = \left\{\frac{1}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\}$;
   (g) $A = [0, 1] \qquad B = (3, 5)$;
   (h) $A = \mathbb{R} \qquad B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Zadania

2. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D, jeśli $A \sim C$ i $B \sim D$, to $A \times B \sim C \times D$.

3. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D, takich że $A \cap B = \emptyset = C \cap D$, jeśli $A \sim C$ i $B \sim D$, to $A \cup B \sim C \cup D$.

4. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A i B, jeśli $A \sim B$, to $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

5. Udowodnij, że
   (a) $\{n \in \mathbb{N} : 2|n\} \sim \{n \in \mathbb{Z} : \neg 2|n\}$;
   (b) $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 5\}$;
   (c) $[0, 2] \setminus \{1\} \sim (1, 3) \cup \{4, 5\}$;
   (d) $(0, 2) \sim [0, 1]$;
   (e) $\{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{N})\, y = 3^x\} \sim \{y \in \mathbb{N} : (\exists x \in \mathbb{R})\, y = 3^x\}$.

Uwaga: W tym zadaniu nie ma konieczności znajdowania bijekcji.

6. O zbiorach A i B wiemy, że $|A \cap B| = |A \cup B|$. Uzasadnij, że $A \sim B$.

7. Zbadaj, czy dla dowolnych nieskończonych zbiorów A, B, C i D prawdziwe są poniższe zdania.
   (a) Jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f : A \xrightarrow{1-1} B$, która nie jest „na", to $|A| < |B|$.
   (b) Jeśli $|A| < |B|$ i $|B| < |C|$, to $|A| < |C|$.
   (c) Jeśli $|A| \leq |B|$, to $|A \times C| \leq |B \times C|$.
   (d) Jeśli $|A| < |C|$ i $|B| \leq |D|$, to $|A \cup B| < |C \cup D|$.
   (e) Jeśli istnieją surjekcja $f : B \to C$ i injekcja $g : C \to B$, to $B \sim C$.

8. Dla danych nieskończonych, parami różnych zbiorów A, B, C, D wiemy, że $A \sim C$ i $B \sim D$. Czy jeśli $A \cup B \sim C \cup D$, to $A \cap B \sim C \cap D$?

9. Czy dla dowolnych zbiorów A, B, C i D prawdą jest, że jeśli $A \sim C$, $B \sim D$ oraz $B \subsetneq A$, $D \subsetneq C$, to $A \setminus B \sim C \setminus D$?

10. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D, jeśli $A \sim C$ i $B \sim D$, to $A^B \sim C^D$.