Wstęp do matematyki R
Lista zadań nr 11 (na ćwiczenia 10.01.2025).

Ćwiczenia

1. Dany jest zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, \leq\rangle$ oraz $A, B \subseteq X$ i $a \in X$. Zapisz symbolicznie poniższe zdania (wolno użyć m.in. symboli $X, A, B, a, \leq$ i $<$, nie wolno: $\{$, sup).

(a) W zbiorze X nie ma elementu minimalnego.

(b) Zbiór A jest ograniczony w X.

(c) Żaden element zbioru B nie ogranicza z dołu zbioru A.

(d) Zbiór B jest zbiorem wszystkich elementów minimalnych w X.

(e) Istnieje element największy w zbiorze A, który nie jest elementem największym w zbiorze B.

(f) a jest nieporównywalny ze wszystkimi elementami maksymalnymi w zbiorze A.

2. Narysuj diagramy Hassego podanych zbiorów częściowo uporządkowanych $\langle X, \preceq\rangle$. Określ elementy minimalne i maksymalne (ew. najmniejsze i największe).

(a) $X = \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset, Y\}$, gdzie $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B$,

(b) $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 15\},\ x \preceq y \Leftrightarrow x|y$,

(c) $X = \{n \in \mathbb{N} : 7 \leq n \leq 21\},\ x \preceq y \Leftrightarrow x|y$,

(d) $X = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\},\ \langle x, a\rangle \preceq \langle y, b\rangle \Leftrightarrow x \leq y \wedge a \leq b$.

3. Podaj przykłady zbiorów częściowo uporządkowanych $\langle X, \preceq\rangle$ mających poniższe własności. W przypadkach, gdy zbiory te są skończone, postaraj się, by relacja $\preceq$ traktowana jako zbiór miała jak najmniej elementów.

(a) W X są dwa trzyelementowe łańcuchy i jeden trzyelementowy antyłańcuch.

(b) X ma sześć elementów oraz w X jest jeden element maksymalny, dwa elementy minimalne oraz dwa czteroelementowe łańcuchy

(c) W X są dokładnie trzy elementy minimalne i dokładnie dwa elementy maksymalne oraz każdy element minimalny jest połączony z pewnym elementem maksymalnym czteroelementowym łańcuchem (tzn. jest łańcuch, do którego oba te elementy należą).

(d) Zbiór X jest sześcioelementowy, są w nim dokładnie dwa elementy minimalne i dokładnie dwa elementy maksymalne i nie ma czteroelementowego łańcucha.

(e) Zbiór X ma nieskończenie wiele elementów i dokładnie dwa elementy maksymalne, w tym jeden minimalny.

Zastanów się, które z tych porządków mogą występować w postaci $\langle A, |\,\rangle$ dla pewnego $A \subseteq \mathbb{N}$.

4. Podaj przykład porządku na zbiorze $\mathbb{N}$, który

(a) jest liniowy

(b) ma nieskończony antyłańcuch

i w którym każda liczba nieparzysta jest większa od każdej liczby parzystej. (Uwaga: to są dwa osobne zadania.)

Zadania

5. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathbb{R}^2, \leq_p \rangle$, gdzie $\leq_p$ jest standardowym porządkiem produktowym na $\mathbb{R}^2$.

(a) Wybierz konkretne $\langle x_0, y_0 \rangle \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0, 0 \rangle\}$ (czyli swój ulubiony nietrywialny punkt na płaszczyźnie...) i narysuj zbiór elementów z nim porównywalnych.

(b) Sprawdź, dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ prosta $y = ax + b$ jest łańcuchem w tym porządku.

(c) Niech $A = \{\langle x, y \rangle \in [0, 2]^2 : 2x + y \leq 2\}$. Wyznacz kres górny i dolny zbioru A oraz elementy maksymalne i minimalne w A (o ile istnieją, bądź uzasadnij ich nieistnienie). Czy w zbiorze tym jest element największy bądź najmniejszy?

6. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathbb{R}^2, \preceq_p \rangle$, gdzie $\preceq_p$ jest porządkiem na $\mathbb{R}^2$ zdefiniowanym warunkiem

$$\langle x, y \rangle \preceq_p \langle a, b \rangle \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = \langle a, b \rangle \vee (x < a \wedge y < b).$$

Wykonaj te same polecenia, co w zadaniu 5.

7. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathbb{R}^2, \leq_l \rangle$, gdzie $\leq_l$ jest standardowym porządkiem leksykograficznym na $\mathbb{R}^2$. Wykonaj te same polecenia, co w zadaniu 5.

8. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathbb{N}^+ \times \mathbb{R}, \preceq \rangle$, gdzie

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle a, b \rangle \Leftrightarrow x | a \;\wedge\; y \leq b.$$

(a) Wyznacz kres górny zbioru $\{2, 4, 6\}^2$.

(b) Wyznacz zbiór elementów porównywalnych z $\langle 2, 2 \rangle$.

(c) Podaj przykład nieskończonego antyłańcucha w $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{R}$.

9. Niech X będzie zbiorem wszystkich przedziałów otwartych na prostej (niezdegenerowanych). Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, \preceq \rangle$, gdzie

$$I \preceq J \Leftrightarrow I = J \;\vee\; \sup I \leq \inf J.$$

(a) Czy istnieje $J \in X$ taki, że $(0, 1) \prec J \prec (1, 2)$?

(b) Czy w $\mathcal{P}((-\infty, 1)) \cap X$ istnieje element maksymalny?

(c) Podaj przykład nieskończonego antyłańcucha w X.

10. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq \rangle$, gdzie $\preceq$ jest porządkiem zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zadanym warunkiem

$$f \preceq g \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) f(n) \leq g(n).$$

(a) Niech $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będą zadane wzorami $\varphi_0(n) = 0, \varphi_1(n) = 1$. Czy istnieje funkcja $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taka, że $\varphi_0 \prec \psi \prec \varphi_1$? Jeśli nie – uzasadnij dlaczego, jeśli tak – wyznacz zbiór wszystkich funkcji o tej własności.

(b) Wyznacz elementy największe, najmniejsze, maksymalne oraz minimalne w zbiorze $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq \rangle$.