

<http://www.math.uni.wroc.pl/~kraszew>

Granica funkcji

Zadanie 32. Naszkicuj wykresy podanych funkcji i wyznacz podane granice (właściwe bądź niewłaściwe), o ile istnieją:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } -1 \leq x < 1 \\ 2 & \text{dla } 1 \leq x < 3 \\ 3 & \text{dla } 3 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x); \\
 \text{b) } f(x) &= \begin{cases} -x - 1 & \text{dla } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{dla } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x); \\
 \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \\
 \text{d) } f(x) &= \begin{cases} |\ln x| & \text{dla } x > 0 \\ x^3 + 1 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x).
 \end{aligned}$$

Zadanie 33. Oblicz granice:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 - x + 1), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^4 - 5x + 1 - \frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{1-x} - \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x^2} - 2\right) \\
 &\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^3-1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x+1} - 1\right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-4x+1}{\sqrt{x^4+x^2}},
 \end{aligned}$$

Zadanie 34. Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}.$$

Zadanie 35. Oblicz granice:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+7}{x-4}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2-5x+4}{x-1} + 2\right), \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x^2-x-1}, \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}, \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}, \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27-x^3}{x-3}, \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}, \\
 \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}, \quad \text{j) } \lim_{x \rightarrow 25} \frac{5-\sqrt{x}}{x+25}, \quad \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}, \quad \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{5x},
 \end{aligned}$$

Ciągłość funkcji

Zadanie 36. Zbadaj ciągłość następujących funkcji

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{dla } 1 < x \leq 2 \end{cases}, \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{dla } |x| \leq 1 \\ |x-1| & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Zadanie 37. Dobierz parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} bx & \text{dla } x < \pi \\ \frac{\sin x}{ax} & \text{dla } x \geq \pi \end{cases}, \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} bx + 3 & \text{dla } x < 1 \\ 2x^3 + x + a & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

Pochodna funkcji

Zadanie 38. Oblicz pochodne następujących funkcji:

$$7x^7 + 12^{-5}, \quad -6x^{-11}, \quad \sqrt[5]{x^2} + \frac{4}{x^3}, \quad (2\sqrt[3]{x^2} - x)(4\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x^5} + x^2), \quad \frac{2}{x^3\sqrt{x}}(x^4 - 8),$$
$$\frac{3}{3x - 2}, \quad \frac{5x^5 + x - 2}{x^2 + 7}, \quad \frac{8x^3}{x^3 + x - 1}, \quad \frac{\sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}, \quad \frac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}, \quad 2x + \cos x, \quad \frac{e^x + x^3}{3x^3e^x + 2}.$$

Zadanie 39. Oblicz pochodne następujących funkcji używając wzoru na pochodną funkcji złożonej:

$$(x^{10} + 3)^{10}, \quad \ln(x^4 + x), \quad \sin(2x^2 - 4), \quad e^{\cos(5x+1)}, \quad \sqrt[3]{\ln \sin x}.$$

Zadanie 40. Niech $f(x) = x^2 + x$. Znajdź współczynnik kierunkowy prostej łączącej punkty $(1, f(1))$ i $(3, f(3))$. Napisz równanie stycznej w punkcie $(1, f(1))$.

Zadanie 41. Ilość bakterii y w pewnej kolonii po czasie x zadana jest przybliżoną formułą

$$y(x) = (3 \cdot 10^6) \left(1 - \frac{1}{(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}} \right).$$

Oblicz $y'(x)$.

Zadanie 42. Pewne jezioro jest zanieczyszczone bakteriologicznie. Po zastosowaniu pewnych środków odkażających zaobserwowano, że koncentracja bakterii w wodzie (mierzona liczbą bakterii w 1 cm^3) po czasie t wynosi

$$C(t) = 500(8 - t)^2.$$

Oblicz $C'(t)$, $C'(1)$, $C'(6)$.

Zadanie 43. Zależność drogi s od czasu t w pewnym ruchu prostoliniowym dana jest równaniem $s = t^2 - 2t - 8$. Wyznaczyć prędkość średnią od chwili $t_1 = 4$ do chwili $t_2 = 4 + h$, a następnie prędkość w chwili $t_1 = 4$.

Zadanie 44. Korzystając z reguły de l'Hospitala, obliczyć granice funkcji:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}, \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x(e^{\frac{1}{x}} - 1)), \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x},$$