

<http://www.math.uni.wroc.pl/~kraszew>

Funkcja i jej wykres

Zadanie 12. Narysuj (przybliżone) wykresy funkcji

$$2x^6 - 3x^5, \quad x^3 + x, \quad \frac{1}{-x + 3}, \quad (x - 2)(-x + 3)^2.$$

Zadanie 13. Znajdź pierwiastki następujących wielomianów:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \quad x^3 + 5x^2 - 9x - 45, \quad -2x^3 - 2x^2 - 6x, \quad x^4 - 34x^2 + 225.$$

Zadanie 14. Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji $f(x) = (x - 2)(x + 3)$. Dla tej funkcji narysuj wykresy funkcji

$$f(-x), \quad f(2x), \quad f\left(\frac{x}{3}\right), \quad f(x - 4), \quad f(|x|), \quad |f(x)|.$$

Zadanie 15. Wyznacz dziedzinę funkcji:

$$a(x) = \frac{x^3 - 1}{x}, \quad b(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad c(x) = \sin \frac{x - 1}{x + 1}, \quad d(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{(2 - x^2)}.$$

Zadanie 16. Określ złożenia funkcji $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ oraz ich dziedziny, jeżeli

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad g(x) = \frac{1}{x + 1}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}, \quad g(x) = \frac{2x}{x - 4}.$$

Zadanie 17. Dla funkcji $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{x}{1 + x}$, $h(x) = \sqrt{x}$, $p(x) = \ln x$, $q(x) = x^2$, znajdź następujące złożenia funkcji:

$$p(q(x)), \quad q(p(x)), \quad f(g(h(x))), \quad g(p(f(q(x))))), \quad h(q(g(f(x))))).$$

Zadanie 18. Przedstaw każdą z poniższych funkcji jako złożenie co najmniej trzech funkcji:

$$5 \sin(\sqrt{x^3}), \quad 2 + \log(\cos(x^2 - 1)), \quad 4 - \sqrt{\left(\frac{x - 2}{x^2}\right)^3}, \quad \frac{|x| + 1}{|x|}.$$

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna

Zadanie 19. Przedstaw następujące wyrażenia za pomocą logarytmu z pojedynczej liczby:

$$\ln 2 + \ln 3; \quad \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 8); \quad \ln 15 - \ln 3; \quad \ln 20 - \frac{1}{3}(\ln 16 + \ln 4).$$

Zadanie 20. Wyznacz dziedzinę funkcji:

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 4} - \frac{1}{2x - 1}, \quad g(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - 1},$$

$$h(x) = \sqrt{2x + 1} + \log(x^2 - 2x), \quad i(x) = \log\left(\frac{x}{x - 1} + 1\right) + \sqrt{1 + \log_2 x}.$$

Zadanie 21. Uprość następujące wyrażenia

$$\ln x^3 - \ln x; \quad \ln e^x; \quad \ln e^{x^2+3} - \ln e^x; \quad \ln(x^5 - 3x^2) + 2 \ln x^{-1} - \ln(x^3 - 3).$$

Zadanie 22. Naszkicuj wykresy funkcji:

$$2^{-x} + 1, \quad |2^x - 3|, \quad |\log_2 x|, \quad \log_{\frac{1}{2}} |x|, \quad \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) + 2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, \quad 1 - e^x, \quad \ln(1 - x).$$

Zadanie 23. Rozwiąż równania:

$$2^{x-4} \cdot 8^{3-2x} = 4^{3x-3}; \quad 3^{x+1} - 11 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 \cdot 9^{-x} = -5; \quad 2^{x+2} + 8 \cdot 2^{-2-x} = 6; \quad 7^{5x} - 7^{5x-1} = 6.$$

Zadanie 24. Rozwiąż nierówności:

$$4^{x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} < 16; \quad 2^{-x+1} < 4^{x^2}; \quad 5 \cdot 4^x - 4 \cdot 5^{2x} < 10^x; \quad 3^{\frac{x-3}{3x-2}} < \frac{1}{3}.$$

Zadanie 25. Rozwiąż równania:

$$2 \log(x - 3) - \log(x - 2) = \frac{1}{2} \log 0,25; \quad 4 - \log x = 3\sqrt{\log x}; \quad \log^2 x - \log x^3 + 2 = 0; \quad x^{\log x} = 100x.$$

Zadanie 26. Rozwiąż nierówności:

$$\log_2(x + 2) + \log_2(x - 1) > 2; \quad |3 - \log_2 x| < 1; \quad \log_2(x + 2) < 2; \quad 2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - 9 \log_{\frac{1}{2}} x + 4 > 0.$$

Zadanie 27. Ciśnienie gazu na wysokości h powyżej poziomu morza można obliczyć za pomocą równania barometrycznego

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

gdzie M jest masą molową gazu, p_0 – ciśnieniem na poziomie morza a g , T i R to stałe. Wyraż h za pomocą pozostałych zmiennych.

Zadanie 28. Użycie środka DDT jest zabronione obecnie w wielu krajach z powodu długoterminowego szkodliwego wpływu na środowisko naturalne. Okres połowicznego rozkładu DDT wynosi 12 lat. Farmer w USA rozsypał na swoim polu 20 kg tego środka w 1972 roku. Ile DDT jest jeszcze aktywne? Kiedy ilość aktywnego DDT na polu będzie wynosiła mniej niż 10 gramów?

Zadanie 29. Wprowadzona chora komórka do organizmu zdrowej myszy podwaja się po $\frac{1}{2}$ dnia. Pod koniec dnia te dwie komórki dzielą się na cztery. To podwajanie trwa aż do momentu gdy liczba chorych komórek przekroczy jeden miliard, gdyż wtedy mysz umiera.

a) Napisz równanie na liczbę zakażonych komórek po t dniach.

b) Ile dni żyje mysz od momentu zakażenia?

Liczby zespolone

Zadanie 30. Wykonaj następujące działania na liczbach zespolonych

$$i) (2 + 3i) + (5 - 8i), \quad ii) (1 - i) \cdot (3 + 2i), \quad iii) \frac{3}{i}, \quad iv) \frac{(2-i)}{-i}, \quad v) i^3, \quad vi) i^4, \quad vii) i^6.$$

Zadanie 31. Znajdź pierwiastki następujących równań

$$i) x^2 - 4x + 5, \quad ii) x^3 - 2x^2 + 5x.$$

Jan Kraszewski