W każdym z poniższych 20 zadań podaj wzór na funkcję różniczkowalną na całej prostej (lub w podanej dziedzinie) o podanym wzorze na pochodną oraz o podanej wartości w podanym punkcie.

820. $f'(x)=(4x-5)^{54}$ $f(1)=1$ $\boldsymbol{f(x)=\frac{(4x-5)^{55}}{220}+\frac{221}{220}}$

821. $f'(x)=\sqrt{3x+1}$ $f(1)=1$ $D_f=\left(-\frac{1}{3},\,+\infty\right)$ $\boldsymbol{f(x)=\frac{2}{9}\cdot(3x+1)^{3/2}-\frac{7}{9}}$

822. $f'(x)=\frac{x}{(x^2+1)^4}$ $f(1)=1$ $\boldsymbol{f(x)=\frac{-1}{6\cdot(x^2+1)^3}+\frac{49}{48}}$

823. $f'(x)=\frac{x^3}{x^4+1}$ $f(0)=7$ $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{4}\cdot\ln\left(x^4+1\right)+7}$

824. $f'(x)=\frac{1}{(3x-5)^2+1}$ $f(2)=0$ $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}(3x-5)-\frac{\pi}{12}}$

825. $f'(x)=\sqrt[5]{x}$ $f(1)=1$ $\boldsymbol{f(x)=\frac{5x^{6/5}}{6}+\frac{1}{6}}$

826. $f'(x)=200x\cdot\left(x^2+1\right)^{99}$ $f(0)=0$ $\boldsymbol{f(x)=\left(x^2+1\right)^{100}-1}$

827. $f'(x)=6x^3\cdot\sqrt{x^4+9}$ $f(2)=2$ $\boldsymbol{f(x)=\left(x^4+9\right)^{3/2}-123}$

828. $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$ $f(-1)=-1$ $\boldsymbol{f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)-1}$

829. $f'(x)=\frac{4x^3+2x+1}{(x^4+x^2+x+1)^2}$ $f(1)=1$ $\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{x^4+x^2+x+1}+\frac{5}{4}}$

830. $f'(x)=\sqrt[7]{x+1}$ $f(0)=2$ $\boldsymbol{f(x)=\frac{7(x+1)^{8/7}}{8}+\frac{9}{8}}$

831. $f'(x)=x^2\cdot\left(x^3+1\right)^{100}$ $f(0)=1$ $\boldsymbol{f(x)=\frac{\left(x^3+1\right)^{101}}{303}+\frac{302}{303}}$

832. $f'(x)=x^5\cdot\sqrt[3]{x^6+7}$ $f(1)=0$ $\boldsymbol{f(x)=\frac{\left(x^6+7\right)^{4/3}}{8}-2}$

833. $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ $f(0)=0$ $\boldsymbol{f(x)=\ln\left(e^x+1\right)-\ln 2}$

834. $f'(x)=\frac{2x^3+x}{x^4+x^2+1}$ $\qquad f(0)=1$ $\qquad f(x)=\frac{\ln\left(x^4+x^2+1\right)}{2}+1$

835. $f'(x)=\frac{2x^3+x}{(x^4+x^2+1)^2}$ $\qquad f(1)=1$ $\qquad f(x)=-\frac{1}{2\cdot(x^4+x^2+1)}+\frac{7}{6}$

836. $f'(x)=\frac{2x^3+x}{(x^4+x^2+1)^3}$ $\qquad f(1)=1$ $\qquad f(x)=-\frac{1}{4\cdot(x^4+x^2+1)^2}+\frac{37}{36}$

837. $f'(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$ $\qquad f(0)=0$ $\qquad f(x)=\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{\pi}{4}$

W kolejnych dwóch zadaniach funkcje mają być ciągłe na $\mathbb{R}$ i różniczkowalne na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

838. $f'(x)=\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\qquad f(0)=2$ $\qquad f(x)=-3\cdot\cos\sqrt[3]{x}+5$

839. $f'(x)=\frac{\sin\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}$ $\qquad f(0)=2$ $\qquad f(x)=-5\cdot\cos\sqrt[5]{x}+7$

Kolejne cztery zadania są przeznaczone do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy wcześniejsze zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

840. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n\cdot\sqrt[7]{x^5+1}\,dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n.

Rozwiązanie:

Przyjmiemy $\mathbf{n=4}$ i wykonamy podstawienie

$$t=\sqrt[7]{x^5+1}\,,$$

czyli

$$t^7=x^5+1$$

oraz formalnie

$$7t^6\,dt=5x^4\,dx\,.$$

Otrzymujemy

$$\int x^4\cdot\sqrt[7]{x^5+1}\,dx=\frac{1}{5}\int\sqrt[7]{x^5+1}\cdot 5x^4\,dx=\frac{1}{5}\int t\cdot 7t^6\,dt=\frac{7}{5}\int t^7\,dt=\frac{7}{5}\cdot\frac{t^8}{8}+C=\frac{7\cdot t^8}{40}+C=$$
$$=\frac{7}{40}\cdot\left(x^5+1\right)^{8/7}+C\,.$$

841. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[11]{x^7+1}\,dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n.

Rozwiązanie:

Przyjmiemy $\mathbf{n=6}$ i wykonamy podstawienie

$$t=\sqrt[11]{x^7+1}\,,$$

czyli

$$t^{11}=x^7+1$$

oraz formalnie

$$11t^{10}\,dt=7x^6\,dx\,.$$

Otrzymujemy

$$\int x^6\cdot\sqrt[11]{x^7+1}\,dx=\frac{1}{7}\int\sqrt[11]{x^7+1}\cdot 7x^6\,dx=\frac{1}{7}\int t\cdot 11t^{10}\,dt=\frac{11}{7}\int t^{11}\,dt=\frac{11}{7}\cdot\frac{t^{12}}{12}+C=$$
$$=\frac{11\cdot t^{12}}{84}+C=\mathbf{\frac{11}{84}\cdot\left(x^7+1\right)^{12/11}+C\,.}$$

842. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+40}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y=x+2$ oraz $t=y/6$:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+40}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+36}=\int\frac{dy}{y^2+36}=\int\frac{dy}{36(y/6)^2+36}=\int\frac{6\,dt}{36t^2+36}=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{\operatorname{arctg} t}{6}+C=\frac{\operatorname{arctg}(y/6)}{6}+C=\frac{\operatorname{arctg}((x+2)/6)}{6}+C\,.$$

843. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\sqrt[3]{8x^{17}+x^{12}}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy podaną całkę

$$\int\sqrt[3]{8x^{17}+x^{12}}\,dx=\int x^4\cdot\sqrt[3]{8x^5+1}\,dx$$

i wykonujemy podstawienie $t=8x^5+1$ oraz formalnie $dt=40x^4\,dx$. Otrzymujemy

$$\int x^4\cdot\sqrt[3]{8x^5+1}\,dx=\frac{1}{40}\cdot\int 40x^4\cdot\sqrt[3]{8x^5+1}\,dx=\frac{1}{40}\cdot\int\sqrt[3]{t}\,dt=\frac{1}{40}\cdot\frac{3\cdot t^{4/3}}{4}+C=$$
$$=\frac{3\cdot t^{4/3}}{160}+C=\frac{3\cdot\left(8x^5+1\right)^{4/3}}{160}+C\,.$$

858. a) $\int \sqrt{3x+1}\,dx = \frac{\mathbf{2\cdot(3x+1)^{3/2}}}{\mathbf{9}}+\mathbf{C}$; b) $\int \sqrt[3]{5x+1}\,dx = \frac{\mathbf{3\cdot(5x+1)^{4/3}}}{\mathbf{20}}+\mathbf{C}$;

c) $\int \sqrt[4]{7x+1}\,dx = \frac{\mathbf{4\cdot(7x+1)^{5/4}}}{\mathbf{35}}+\mathbf{C}$; d) $\int \sqrt[5]{11x+1}\,dx = \frac{\mathbf{5\cdot(11x+1)^{6/5}}}{\mathbf{66}}+\mathbf{C}$.

859. a) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{\mathbf{ln}\left(\mathbf{x^2+1}\right)}{\mathbf{2}}+\mathbf{C}$; b) $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1} = \frac{\mathbf{ln}\left|\mathbf{x^3+1}\right|}{\mathbf{3}}+\mathbf{C}$;

c) $\int \frac{x^3\,dx}{x^4+1} = \frac{\mathbf{ln}\left(\mathbf{x^4+1}\right)}{\mathbf{4}}+\mathbf{C}$; d) $\int \frac{x^4\,dx}{x^5+1} = \frac{\mathbf{ln}\left|\mathbf{x^5+1}\right|}{\mathbf{5}}+\mathbf{C}$.

860. a) $\int \frac{x\,dx}{x^4+1} = \frac{\mathbf{arctg}\left(\mathbf{x^2}\right)}{\mathbf{2}}+\mathbf{C}$; b) $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+1} = \frac{\mathbf{arctg}\left(\mathbf{x^3}\right)}{\mathbf{3}}+\mathbf{C}$;

c) $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+1} = \frac{\mathbf{arctg}\left(\mathbf{x^4}\right)}{\mathbf{4}}+\mathbf{C}$; d) $\int \frac{x^4\,dx}{x^{10}+1} = \frac{\mathbf{arctg}\left(\mathbf{x^5}\right)}{\mathbf{5}}+\mathbf{C}$.

861. a) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2\cdot(x^2+1)}}+\mathbf{C}$; b) $\int \frac{x^2\,dx}{(x^3+1)^3} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{6\cdot(x^3+1)^2}}+\mathbf{C}$;

c) $\int \frac{x^3\,dx}{(x^4+1)^4} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{12\cdot(x^4+1)^3}}+\mathbf{C}$; d) $\int \frac{x^4\,dx}{(x^5+1)^5} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{20\cdot(x^5+1)^4}}+\mathbf{C}$.

862. a) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \mathbf{arctg\,(x+1)+C}$; b) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \mathbf{arctg\,(x+2)+C}$;

c) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \mathbf{arctg\,(x+3)+C}$; d) $\int \frac{dx}{x^2+14x+50} = \mathbf{arctg\,(x+7)+C}$.

863. a) $\int \frac{dx}{x^2+4} = \mathbf{\frac{1}{2}\cdot arctg\,\frac{x}{2}+C}$; b) $\int \frac{dx}{x^2+5} = \mathbf{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C}$;

c) $\int \frac{dx}{x^2+7} = \mathbf{\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot arctg\,\frac{x}{\sqrt{7}}+C}$; d) $\int \frac{dx}{x^2+9} = \mathbf{\frac{1}{3}\cdot arctg\,\frac{x}{3}+C}$.

864. a) $\int \sqrt[3]{x^9+x^6}\,dx = \frac{\mathbf{\left(x^3+1\right)^{4/3}}}{\mathbf{4}}+\mathbf{C}$; b) $\int \sqrt[5]{x^{25}+x^{20}}\,dx = \frac{\mathbf{\left(x^5+1\right)^{6/5}}}{\mathbf{6}}+\mathbf{C}$;

c) $\int \sqrt[7]{x^{49}+x^{42}}\,dx = \frac{\mathbf{\left(x^7+1\right)^{8/7}}}{\mathbf{8}}+\mathbf{C}$; d) $\int \sqrt[9]{x^{81}+x^{72}}\,dx = \frac{\mathbf{\left(x^9+1\right)^{10/9}}}{\mathbf{10}}+\mathbf{C}$.