

Kolokwium nr 1: czwartek 6.03.2025, godz. 16:15–17:45, materiał zad. 792–864.

Zadania do omówienia¹ na ćwiczeniach w czwartek² 6.03.2025.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami

21. Całkowanie przez podstawienie.

W każdym z poniższych 20 zadań podaj wzór na funkcję różniczkowalną na całej prostej (lub w podanej dziedzinie) o podanym wzorze na pochodną oraz o podanej wartości w podanym punkcie.

$$820. \quad f'(x) = (4x - 5)^{54} \qquad f(1) = 1 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$821. \quad f'(x) = \sqrt{3x+1} \qquad f(1) = 1 \qquad D_f = \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right) \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$822. \quad f'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^4} \qquad f(1) = 1 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$823. \quad f'(x) = \frac{x^3}{x^4+1} \qquad f(0) = 7 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$824. \quad f'(x) = \frac{1}{(3x-5)^2+1} \qquad f(2) = 0 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$825. \quad f'(x) = \sqrt[5]{x} \qquad f(1) = 1 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$826. \quad f'(x) = 200x \cdot (x^2+1)^{99} \qquad f(0) = 0 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$827. \quad f'(x) = 6x^3 \cdot \sqrt{x^4+9} \qquad f(2) = 2 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$828. \quad f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \qquad f(-1) = -1 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$829. \quad f'(x) = \frac{4x^3+2x+1}{(x^4+x^2+x+1)^2} \qquad f(1) = 1 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$830. \quad f'(x) = \sqrt[7]{x+1} \qquad f(0) = 2 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$831. \quad f'(x) = x^2 \cdot (x^3+1)^{100} \qquad f(0) = 1 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$832. \quad f'(x) = x^5 \cdot \sqrt[3]{x^6+7} \qquad f(1) = 0 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$833. \quad f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \qquad f(0) = 0 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$834. \quad f'(x) = \frac{2x^3+x}{x^4+x^2+1} \qquad f(0) = 1 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$835. \quad f'(x) = \frac{2x^3+x}{(x^4+x^2+1)^2} \qquad f(1) = 1 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

¹Zadania podobne do wcześniejszych będą pominięte.²Grupa 4 omawia tę listę w poniedziałek 3.03.2025.

$$836. \quad f'(x) = \frac{2x^3 + x}{(x^4 + x^2 + 1)^3} \qquad f(1) = 1 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$837. \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \qquad f(0) = 0 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

W kolejnych dwóch zadaniach funkcje mają być ciągłe na \mathbb{R} i różniczkowalne na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$838. \quad f'(x) = \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad f(0) = 2 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

$$839. \quad f'(x) = \frac{\sin \sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4}} \qquad f(0) = 2 \qquad f(x) = \dots\dots\dots$$

Kolejne cztery zadania są przeznaczone do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy wcześniejsze zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

840. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[7]{x^5 + 1} \, dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n .

841. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[11]{x^7 + 1} \, dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n .

842. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 40}.$$

843. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt[3]{8x^{17} + x^{12}} \, dx.$$

W tych z poniższych zadań, w których trzeba wykonać obliczenia dla jednej wybranej liczby n , po rozwiązaniu zadania przedyskutować inne wartości n , dla których rozwiązanie jest możliwe.

844. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[8]{x^6 + 1} \, dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n .

845. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot (x^5 + 1)^{2023} \, dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n .

846. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot e^{x^{10}} dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej $n > 20$.

847. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^n}{x^{20} + 2x^{10} + 4} dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n .

848. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{k \cdot x^{20} + x^n}{(x^{21} + x^7 + 44)^{44}} dx$$

dla odpowiednio wybranych liczb naturalnych n i k .

Obliczyć całki nieoznaczone

849. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

850. $\int \frac{x}{x^2 + 10x + 169} dx$

851. $\int \sqrt{2 + \sqrt{x+4}} dx$

852. $\int \sqrt[8]{x^{55} + x^{48}} dx$

853. $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

854. $\int \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x} dx$

855. $\int \frac{(\ln \ln \ln x)^2}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x} dx$

856. $\int \cos^5 x dx$

857. $\int \operatorname{tg} x dx$

858. a) $\int \sqrt{3x+1} dx = \dots$; b) $\int \sqrt[3]{5x+1} dx = \dots$;

c) $\int \sqrt[4]{7x+1} dx = \dots$; d) $\int \sqrt[5]{11x+1} dx = \dots$

859. a) $\int \frac{x dx}{x^2+1} = \dots$; b) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1} = \dots$; c) $\int \frac{x^3 dx}{x^4+1} = \dots$; d) $\int \frac{x^4 dx}{x^5+1} = \dots$

860. a) $\int \frac{x dx}{x^4+1} = \dots$; b) $\int \frac{x^2 dx}{x^6+1} = \dots$; c) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+1} = \dots$; d) $\int \frac{x^4 dx}{x^{10}+1} = \dots$

861. a) $\int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} = \dots$; b) $\int \frac{x^2 dx}{(x^3+1)^3} = \dots$; c) $\int \frac{x^3 dx}{(x^4+1)^4} = \dots$; d) $\int \frac{x^4 dx}{(x^5+1)^5} = \dots$

862. a) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \dots$; b) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \dots$;

c) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \dots$; d) $\int \frac{dx}{x^2+14x+50} = \dots$

863. a) $\int \frac{dx}{x^2+4} = \dots$; b) $\int \frac{dx}{x^2+5} = \dots$; c) $\int \frac{dx}{x^2+7} = \dots$; d) $\int \frac{dx}{x^2+9} = \dots$

864. a) $\int \sqrt[3]{x^9+x^6} dx = \dots$; b) $\int \sqrt[5]{x^{25}+x^{20}} dx = \dots$;

c) $\int \sqrt[7]{x^{49}+x^{42}} dx = \dots$; d) $\int \sqrt[9]{x^{81}+x^{72}} dx = \dots$