816. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=6x+6 \qquad \text{dla} \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=x$ dla $x\in\{-1,\,0,\,2\}$. Wyznaczyć $f(3)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3+3x^2\right)=6x+6\,,$$

a funkcjami o drugiej pochodnej równej 0 są funkcje liniowe, funkcja f na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+Ax+B & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,1) \\ x^3+3x^2+Cx+D & \text{dla} \quad x\in(1,\,+\infty) \end{cases}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 1 wymaga istnienia granicy w tym punkcie, czyli zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x=1$. Musi więc zachodzić równość

$$A+B=C+D\,. \tag{$\clubsuit$}$$

Warunki $f(x)=x$ dla $x\in\{-1,\,0,\,2\}$ sprowadzają się odpowiednio do

$$-1=2-A+B\,, \tag{$\diamondsuit$}$$

$$0=B\,, \tag{$\heartsuit$}$$

$$2=20+2C+D\,. \tag{$\spadesuit$}$$

Rozwiązanie układu otrzymanych czterech równań ($\clubsuit$), ($\diamondsuit$), ($\heartsuit$) i ($\spadesuit$) prowadzi do

$$A=3\,, \qquad B=0\,, \qquad C=-21\,, \qquad D=24\,.$$

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+3x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,1) \\ x^3+3x^2-21x+24 & \text{dla} \quad x\in[1,\,+\infty) \end{cases}$$

Zatem $f(3)=15$.

817. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=\sqrt{x^4-8x^2+16}\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(-3)=-3$. Wyznaczyć $f(3)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f'(x)=\sqrt{x^4-8x^2+16}=\sqrt{\left(x^2-4\right)^2}=\left|x^2-4\right|=\begin{cases} x^2-4 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-2) \\ 4-x^2 & \text{dla} \quad x\in[-2,\,2) \\ x^2-4 & \text{dla} \quad x\in[2,\,+\infty) \end{cases}$$

Wobec tego

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-4x+C_1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-2) \\ 4x-\dfrac{x^3}{3}+C_2 & \text{dla} \quad x\in[-2,\,2) \\ \dfrac{x^3}{3}-4x+C_3 & \text{dla} \quad x\in[2,\,+\infty) \end{cases}$$

Ciągłość tak określonej funkcji f w punktach -2 oraz 2 wymaga odpowiednio spełnienia następujących równości:

$$\frac{x^3}{3}-4x+C_1=4x-\frac{x^3}{3}+C_2 \quad \text{dla} \quad x=-2, \quad \text{czyli} \quad \frac{16}{3}+C_1=-\frac{16}{3}+C_2$$

oraz

$$4x-\frac{x^3}{3}+C_2=\frac{x^3}{3}-4x+C_3 \quad \text{dla} \quad x=2, \quad \text{czyli} \quad \frac{16}{3}+C_2=-\frac{16}{3}+C_3\,.$$

Ponadto równość $f(-3)=-3$ prowadzi do

$$\frac{x^3}{3}-4x+C_1=-3 \quad \text{dla} \quad x=-3, \quad \text{skąd} \quad C_1=-6\,.$$

W konsekwencji

$$C_2=C_1+\frac{32}{3}=\frac{14}{3} \quad \text{oraz} \quad C_3=C_2+\frac{32}{3}=\frac{46}{3}\,.$$

Zatem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-4x-6 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-2) \\ 4x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{14}{3} & \text{dla} \quad x\in[-2,\,2) \\ \dfrac{x^3}{3}-4x+\dfrac{46}{3} & \text{dla} \quad x\in[2,\,+\infty) \end{cases}$$

Ostatecznie

$$f(3)=\frac{3^3}{3}-4\cdot 3+\frac{46}{3}=\frac{37}{3}\,.$$

818. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=|x|\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=0$ dla $x\in\{1,\,2\}$. Wyznaczyć $f(-1)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f''(x)=\begin{cases} -x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,0] \\ x & \text{dla} \quad x\in[0,\,+\infty) \end{cases}$$

Wobec tego

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}+C_1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty, 0] \\ \dfrac{x^2}{2}+C_2 & \text{dla} \quad x\in[0, +\infty) \end{cases}$$

Przy tym musi być $C_1=C_2$, aby powyższa funkcja była poprawnie określona i ciągła w $x=0$. Niech więc $C=C_1=C_2$.

Otrzymujemy

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^3}{6}+Cx+D_1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty, 0] \\ \dfrac{x^3}{6}+Cx+D_2 & \text{dla} \quad x\in[0, +\infty) \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio, musi być $D_1=D_2$, aby powyższa funkcja była poprawnie określona i ciągła w $x=0$. Niech dalej $D=D_1=D_2$.

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^3}{6}+Cx+D & \text{dla} \quad x\in(-\infty, 0] \\ \dfrac{x^3}{6}+Cx+D & \text{dla} \quad x\in[0, +\infty) \end{cases}$$

lub krócej

$$f(x)=\frac{|x|^3}{6}+Cx+D\,.$$

Warunki $f(1)=f(2)=0$ pozwalają wyznaczyć stałe C i D:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{6}+C+D &= 0 \\ \dfrac{8}{6}+2C+D &= 0 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań dostajemy $C=-7/6$ oraz $D=1$.

W konsekwencji

$$f(x)=\frac{|x|^3}{6}-\frac{7x}{6}+1 \qquad \text{oraz} \qquad f(-1)=\frac{1}{6}+\frac{7}{6}+1=\frac{7}{3}\,.$$

819. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a jej pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=\left|x-x^3\right|\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(-2)=-2$. Wyznaczyć $f(2)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f'(x)=\begin{cases} x-x^3 & \text{dla} \quad x\in(-\infty, -1) \\ x^3-x & \text{dla} \quad x\in[-1, 0) \\ x-x^3 & \text{dla} \quad x\in[0, 1) \\ x^3-x & \text{dla} \quad x\in[1, +\infty) \end{cases}$$

Wobec tego

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4}+C_1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-1) \\ \dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+C_2 & \text{dla} \quad x\in[-1,\,0) \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4}+C_3 & \text{dla} \quad x\in[0,\,1) \\ \dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+C_4 & \text{dla} \quad x\in[1,\,+\infty) \end{cases}$$

Aby powyższa funkcja była poprawnie określona i ciągła w $x=-1$, $x=0$ i $x=1$ muszą zachodzić równości:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+C_1 = \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+C_2 & \qquad (x=-1) \\ C_2 = C_3 & \qquad (x=0) \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+C_3 = \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+C_4 & \qquad (x=1) \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}+C_1 = C_2 \\ C_2 = C_3 \\ \dfrac{1}{2}+C_3 = C_4 \end{cases}$$

Ponadto warunek $f(-2)=-2$ prowadzi do równości

$$-2=f(-2)=\frac{4}{2}-\frac{16}{4}+C_1=2-4+C_1=-2+C_1\,,$$

skąd $C_1=0$ i w konsekwencji $C_2=C_3=1/2$ oraz $C_4=1$.

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4} & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-1) \\ \dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad x\in[-1,\,0) \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad x\in[0,\,1) \\ \dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+1 & \text{dla} \quad x\in[1,\,+\infty) \end{cases}$$

Zatem

$$f(2)=\frac{16}{4}-\frac{4}{2}+C_4=4-2+1=3\,.$$

Odpowiedź: $f(2)=3$.