Zadania do omówienia[1] na ćwiczeniach w czwartek[2] 27.02.2025.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami

20. Odgadywanie funkcji o podanej pochodnej.

W zadaniach z tej listy nie używać całek, a w szczególności nie używać całkowania przez części ani całkowania przez podstawienie !!!

Odgadnąć wzór na funkcję różniczkowalną $f: D_f \to \mathbb{R}$, której pochodna jest dana wzorem:

792. $f'(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$

793. $f'(x) = 10x^4$, $D_f = \mathbb{R}$

794. $f'(x) = \sqrt{x}$, $D_f = (0, +\infty)$

795. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $D_f = (0, +\infty)$

796. $f'(x) = \dfrac{1}{x^4}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

797. $f'(x) = e^{7x}$, $D_f = \mathbb{R}$

798. $f'(x) = \sin 66x$, $D_f = \mathbb{R}$

799. $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$

800. $f'(x) = (x+1)^3$, $D_f = \mathbb{R}$

801. $f'(x) = x^3+3x^2+3x+1$, $D_f = \mathbb{R}$

802. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje n-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

803. Funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, a ponadto wiadomo, że $f(1) = 0$. Co można wywnioskować o $f(2)$ oraz o $f(-1)$?

804. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \dfrac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f(2) = 0$.

805. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \dfrac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f(-2) = 0$.

806. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2025-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f^{(2025)}(x) = e^{3x}$.

807. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2025-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f^{(2025)}(x) = \sin^2 x$.

808. Dane są funkcje różniczkowalne $f_1, f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. **Zapamiętać to zadanie, gdyż będzie wykorzystywane na wykładzie.**

809. Dane są funkcje różniczkowalne $f_1, f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. **Zapamiętać to zadanie, gdyż będzie wykorzystywane na wykładzie.**

[1] Zadania podobne do wcześniejszych będą pominięte.

[2] Grupa 4 omawia tę listę w poniedziałek 24.02.2025.

810. Dana jest funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

811. Dana jest funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x)=f'(x)\cdot f(x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

812. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{los}x=\operatorname{nos}x,\qquad \frac{d}{dx}\operatorname{nos}x=\operatorname{sos}x,\qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sos}x=\operatorname{los}x\,.$$

Wyznaczyć wszystkie funkcje 2025-krotnie różniczkowalne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x\in\mathbb{R}$ warunek $f^{(2025)}(x)=\operatorname{los}(2025x)$.

813. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, różniczkowalne na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, spełniające dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ warunek $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$.

814. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, które są dwukrotnie różniczkowalne na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ i spełniają dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ warunek $f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$. Wskazać wśród nich funkcję spełniajacą dodatkowy warunek $f(-1)=f(1)=f(4)=0$.

815. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, trzykrotnie różniczkowalne na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, spełniające dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ warunek $f'''(x)=x$. Które z nich są ciągłe? Różniczkowalne? Dwukrotnie różniczkowalne? Trzykrotnie różniczkowalne?

816. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=6x+6 \qquad \text{dla} \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=x$ dla $x\in\{-1,\,0,\,2\}$. Wyznaczyć $f(3)$.

817. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=\sqrt{x^4-8x^2+16}\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(-3)=-3$. Wyznaczyć $f(3)$.

818. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=|x|\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=0$ dla $x\in\{1,\,2\}$. Wyznaczyć $f(-1)$.

819. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a jej pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=\left|x-x^3\right|\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(-2)=-2$. Wyznaczyć $f(2)$.