740. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 9\,.$$

Rozwiązanie:

Niech q będzie ilorazem szeregu geometrycznego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności $a_1>0$ oraz $0<q<1$, a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem $a_n = a_1 q^{n-1}$. Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}\,.$$

Ponieważ wyrazy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

wyrażają się wzorem

$$a_n^2 = a_1^2 \cdot \left(q^2\right)^{n-1}\,,$$

szereg ten jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1^2 i ilorazie q^2. Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1-q^2}\,.$$

Zatem warunki podane w treści zadania przyjmują postać

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1^2}{1-q^2} = 9\,,$$

co po przekształceniu prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a_1 = 9\cdot(1-q) \\ a_1^2 = 9\cdot(1-q)\cdot(1+q) \end{cases}$$

Podstawienie $a_1 = 9\cdot(1-q)$ do drugiego równania daje

$$81\cdot(1-q)^2 = 9\cdot(1-q)\cdot(1+q)\,,$$

skąd po uwzględnieniu $q\neq 1$ i podzieleniu obustronnie przez $9\cdot(1-q)$ otrzymujemy kolejno

$$9-9q = q+1\,,$$

$$q=4/5, \qquad a_1 = 9/5\,.$$

Odpowiedź: Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9\cdot 4^{n-1}}{5^n}\,.$$

741. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n=cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}cq^{n-1}=\frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}c^2\left(q^2\right)^{n-1}=\frac{c^2}{1-q^2}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases}\dfrac{c}{1-q} & = & 4\\ \dfrac{c^2}{1-q^2} & = & 8\,,\end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases}c & = & 4(1-q)\\ c^2 & = & 8\left(1-q^2\right)\,.\end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$c=2+2q\,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania daje kolejno

$$2+2q=4-4q\,,$$

$$6q=2\,,$$

$$q=\frac{1}{3}\,,$$

skąd

$$c=2+2q=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}\,.$$

Otrzymane rozwiązanie $q=1/3$, $c=8/3$ prowadzi do

$$a_n=cq^{n-1}=\frac{8}{3^n}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{3^n}\,.$$

742. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3 \quad\text{ oraz }\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=1\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = aq^{n-1}$, pamiętając, aby $a>0$ oraz $0<q<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a(-q)^{n-1} = \frac{a}{1+q}\,,$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a = 3(1-q) \\ a = 1+q \end{cases}$$

mającego rozwiązanie $q=1/2$, $a=3/2$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}\,.$$

743. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2 = 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,.$$

Dla podanego przykładu wyznaczyć wartości sum szeregów występujących w powyższym równaniu i sprawdzić, że jest ono spełnione.

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = c\cdot q^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c\cdot q^{n-1} = \frac{c}{1-q}\,,$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2\cdot \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2}\,,$$

co w połączeniu z warunkiem podanym w treści zadania prowadzi do równania

$$\left(\frac{c}{1-q}\right)^2 = 2\cdot \frac{c^2}{1-q^2}\,,$$

czyli

$$\frac{c^2}{(1-q)^2} = \frac{2\cdot c^2}{1-q^2}\,.$$

Przekształcanie powyższego równania prowadzi kolejno do:

$$\frac{c^2}{(1-q)^2} = \frac{2\cdot c^2}{(1-q)(1+q)}\,,$$

$$1+q = 2\cdot(1-q)\,,$$

$$1+q = 2-2q\,,$$

$$3q = 1\,,$$

$$q=1/3\,.$$

Widzimy więc, że w przypadku szeregu geometrycznego, podany w zadaniu warunek jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz szeregu jest równy 1/3.

Możemy więc przyjąć

$$a_n=\frac{1}{3^n}\,,$$

co prowadzi do

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n}=\frac{1}{8}\,.$$

Wówczas podane w treści zadania równanie przyjmuje postać

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=2\cdot\frac{1}{8}\,,$$

jest więc spełnione – każda z jego stron jest równa 1/4.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\,.$$

744. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=6\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n=cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}cq^{n-1}=\frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}c^2q\left(q^2\right)^{n-1}=\frac{c^2q}{1-q^2}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases}\dfrac{c}{1-q}=6\\[2mm]\dfrac{c^2q}{1-q^2}=6\,,\end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases}c=6(1-q)\\c^2q=6\left(1-q^2\right)\,.\end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$cq=1+q\,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania przemnożonego przez q daje kolejno

$$1+q=6q-6q^2\,,$$

$$6q^2-5q+1=0\,,$$

$$q=\frac{5\pm1}{12}\,,$$

skąd

$$q=1/3,\qquad c=4$$

lub

$$q=1/2,\qquad c=3\,.$$

Otrzymane rozwiązania prowadzą odpowiednio do

$$a_n=cq^{n-1}=\frac{4}{3^{n-1}}\quad \text{oraz}\quad a_n=cq^{n-1}=\frac{3}{2^{n-1}}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}\,.$$

745. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})^2=\frac{4}{3}\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n=cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}cq^{n-1}=\frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})^2=\sum_{n=1}^{\infty}c^2(1+q)^2\cdot\left(q^2\right)^{n-1}=\frac{c^2\cdot(1+q)^2}{1-q^2}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases}\dfrac{c}{1-q}=\dfrac{4}{3}\\[2mm] \dfrac{c^2\cdot(1+q)^2}{1-q^2}=\dfrac{4}{3}\,,\end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases}3c=4(1-q)\\ 3c^2\cdot(1+q)=4\,(1-q)\,.\end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$c\cdot(1+q)=1\,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania przemnożonego przez $1+q$ daje kolejno

$$3=4\cdot\left(1-q^2\right),$$

$$3/4=1-q^2,$$

$$q^2=1/4,$$

skąd

$$q=1/2, \qquad c=1/(1+q)=2/3.$$

Otrzymane rozwiązanie prowadzi do

$$a_n=cq^{n-1}=\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}.$$

746. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=15\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4.$$

Rozwiązanie:

Niech q będzie ilorazem szeregu geometrycznego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności $a_1>0$ oraz $0<q<1$, a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem $a_n=a_1q^{n-1}$. Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a_1}{1-q}.$$

Ponieważ wyrazy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$$

wyrażają się odpowiednio wzorami

$$a_n^2=a_1^2\cdot\left(q^2\right)^{n-1} \quad \text{oraz} \quad a_n^4=a_1^4\cdot\left(q^4\right)^{n-1},$$

szeregi te są szeregami geometrycznymi o ilorazach odpowiednio q^2 oraz q^4. Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\frac{a_1^2}{1-q^2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4=\frac{a_1^4}{1-q^4}.$$

Zatem warunek podany w treści zadania przyjmuje postać

$$\frac{a_1}{1-q}=3\cdot\frac{a_1^2}{1-q^2}=15\cdot\frac{a_1^4}{1-q^4},$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-q} = 3\cdot\dfrac{a_1^2}{1-q^2} \\ \dfrac{a_1^2}{1-q^2} = 5\cdot\dfrac{a_1^4}{1-q^4} \end{cases}$$

równoważnego (po uproszczeniu) układowi

$$\begin{cases} 1+q = 3\cdot a_1 \\ 1+q^2 = 5\cdot a_1^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $q=3a_1-1$, co po podstawieniu do równania drugiego daje

$$1+(3a_1-1)^2=5a_1^2\,,$$

czyli kolejno

$$1+9a_1^2-6a_1+1=5a_1^2\,,$$

$$4a_1^2-6a_1+2=0\,,$$

$$2a_1^2-3a_1+1=0\,,$$

co jest spełnione przez $a_1=1$ oraz $a_1=1/2$, prowadzące odpowiednio do $q=2$ oraz $q=1/2$. Pierwsze z tych rozwiązań odrzucamy, gdyż nie spełnia ono nierówności $q<1$.

Odpowiedź: Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,.$$

747. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=20, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=5\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n=c\cdot q^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot q^{n-1}=\frac{c}{1-q}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{2}\cdot\left(\frac{q}{2}\right)^{n-1}=\frac{c/2}{1-q/2}=\frac{c}{2-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{3}\cdot\left(\frac{q}{3}\right)^{n-1}=\frac{c/3}{1-q/3}=\frac{c}{3-q}\,,$$

co w połączeniu z warunkami podanymi w treści zadania prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q}=20 \\ \dfrac{c}{2-q}=8 \\ \dfrac{c}{3-q}=5 \end{cases}$$

Po przemnożeniu równań przez mianowniki występujące po lewej stronie otrzymujemy

$$\begin{cases} c=20-20q \\ c=16-8q \\ c=15-5q \end{cases}$$

Odjęcie stronami od pierwszych dwóch równań trzeciego równania daje

$$\begin{cases} 0=5-15q \\ 0=1-3q \\ c=15-5q \end{cases}$$

Stąd dostajemy rozwiązanie $q=1/3$, $c=40/3$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{40}{3^n}.$$

748. Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 .$$

Rozwiązanie:

Sposób I (dla miłośników bezmyślnych rachunków)

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu rozważmy szereg geometryczny o pierwszym wyrazie $c\neq 0$ i ilorazie $q\neq 0$, pamiętając, aby $|q|<1$. Wówczas $a_n=cq^{n-1}$, a ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1}=\frac{c}{1-q},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty} c^2\left(q^2\right)^{n-1}=\frac{c^2}{1-q^2}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4=\sum_{n=1}^{\infty} c^4\left(q^4\right)^{n-1}=\frac{c^4}{1-q^4},$$

co po uwzględnieniu warunków zadania prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} = 5 \\ \dfrac{c^2}{1-q^2} = \dfrac{c^4}{1-q^4}, \end{cases}$$

co kolejno prowadzi do:

$$\left\{\begin{array}{lcl} c & = & 5-5q \\ \dfrac{c^2}{1-q^2} & = & \dfrac{c^2\cdot c^2}{(1-q^2)\cdot(1+q^2)}\,, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} c & = & 5-5q \\ 1 & = & \dfrac{c^2}{1+q^2}\,, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} c & = & 5-5q \\ 1+q^2 & = & c^2\,, \end{array}\right.$$

Pierwsze równanie daje zależność c od q. Podstawiając tę zależność do drugiego równania otrzymujemy kolejno:

$$q^2+1=25q^2-50q+25\,,$$

$$24q^2-50q+24=0\,,$$

$$12q^2-25q+12=0\,,$$

$$q=\frac{25\pm\sqrt{25^2-4\cdot 12\cdot 12}}{24}=\frac{25\pm\sqrt{25^2-24^2}}{24}=\frac{25\pm\sqrt{(25-24)\cdot(25+24)}}{24}=$$

$$=\frac{25\pm\sqrt{49}}{24}=\frac{25\pm 7}{24}\,.$$

Uwzględniając nierówność $|q|<1$ odrzucamy rozwiązanie $q=32/24=4/3>1$ i rozpatrujemy $q=18/24=3/4$. Ostatecznie

$$q=3/4\,,\qquad c=5/4\,.$$

Otrzymane rozwiązanie prowadzi do

$$a_n=cq^{n-1}=\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{5\cdot 3^{n-1}}{4^n}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 3^{n-1}}{4^n}\,.$$

Sposób II (dla myślących i uważnie czytających założenia)

Przyjmijmy $a_n=1$ dla $n\leqslant 5$ oraz $a_n=0$ dla $n\geqslant 6$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej k otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^k=5\,,$$

skąd wynika, że podany szereg spełnia warunki zadania.

749. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-9}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że
$$\frac{1}{4n^2-9}=\frac{1}{(2n-3)(2n+3)}=\frac{A}{2n-3}+\frac{B}{2n+3}\,.$$
Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(2n-3)(2n+3)$ otrzymujemy
$$1=A(2n+3)+B(2n-3)\,. \qquad (*)$$
Dla $n=3/2$ otrzymujemy $A=1/6$, natomiast przyjęcie $n=-3/2$ daje $B=-1/6$.
Inny sposób: porównując w równaniu (*) współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem
$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n^2-9}=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+3}\right)=$$
$$=\frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{15}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{2N-7}-\frac{1}{2N-1}\right)+\left(\frac{1}{2N-5}-\frac{1}{2N+1}\right)+\left(\frac{1}{2N-3}-\frac{1}{2N+3}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{-1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{2N+3}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{2N+3}\right),$$
co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/18$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/18$.

750. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że
$$\frac{1}{n^2+3n}=\frac{1}{n\cdot(n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+3}\,.$$
Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n\cdot(n+3)$ otrzymujemy
$$1=A(n+3)+Bn\,.$$
Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/3$, natomiast przyjęcie $n=-3$ daje $B=-1/3$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem
$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+3n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+2}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+3}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $11/18$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $11/18$.

751. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{9n^2+3n-2}=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{A}{3n-1}+\frac{B}{3n+2}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(3n-1)(3n+2)$ otrzymujemy

$$1=A(3n+2)+B(3n-1).$$

Dla $n=1/3$ otrzymujemy $A=1/3$, natomiast przyjęcie $n=-2/3$ daje $B=-1/3$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{9n^2+3n-2}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3N-7}-\frac{1}{3N-4}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{3N-4}-\frac{1}{3N-1}\right)+\left(\frac{1}{3N-1}-\frac{1}{3N+2}\right)\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3N+2}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/6$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/6$.

752. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-4}.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2-4}=\frac{1}{(n-2)(n+2)}=\frac{A}{n-2}+\frac{B}{n+2}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(n-2)(n+2)$ otrzymujemy

$$1=A(n+2)+B(n-2).$$

Dla $n=2$ otrzymujemy $A=1/4$, natomiast przyjęcie $n=-2$ daje $B=-1/4$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n^2-4}=\frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{N-6}-\frac{1}{N-2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{N-5}-\frac{1}{N-1}\right)+\left(\frac{1}{N-4}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+2}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $25/48$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $25/48$.

753. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wyrażenie pod znakiem sumy na ułamki proste, czyli szukamy takich liczb A, B i C, że

$$\frac{1}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}+\frac{C}{n+3}\,. \tag{1}$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ otrzymujemy

$$1=A\cdot(n+2)\cdot(n+3)+B\cdot n\cdot(n+3)+C\cdot n\cdot(n+2)\,.$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/6$, dla $n=-2$ dostajemy $B=-1/2$, natomiast przyjęcie $n=-3$ daje $C=1/3$. Można też ułożyć układ równań na współczynniki i go rozwiązać.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1/6}{n}-\frac{1/2}{n+2}+\frac{1/3}{n+3}\right)=$$
$$=\left(\frac{1/6}{1}-\frac{1/2}{3}+\frac{1/3}{4}\right)+\left(\frac{1/6}{2}-\frac{1/2}{4}+\frac{1/3}{5}\right)+\left(\frac{1/6}{3}-\frac{1/2}{5}+\frac{1/3}{6}\right)+\left(\frac{1/6}{4}-\frac{1/2}{6}+\frac{1/3}{7}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1/6}{N-2}-\frac{1/2}{N}+\frac{1/3}{N+1}\right)+\left(\frac{1/6}{N-1}-\frac{1/2}{N+1}+\frac{1/3}{N+2}\right)+\left(\frac{1/6}{N}-\frac{1/2}{N+2}+\frac{1/3}{N+3}\right)=$$
$$=\frac{1/6}{1}+\frac{1/6}{2}-\frac{1/3}{3}-\frac{1/6}{N+1}-\frac{1/6}{N+2}+\frac{1/3}{N+3}=\frac{5}{36}-\frac{1/6}{N+1}-\frac{1/6}{N+2}+\frac{1/3}{N+3}\,,$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $5/36$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $5/36$.

754. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2+5n}=\frac{1}{n\cdot(n+5)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+5}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n\cdot(n+5)$ otrzymujemy

$$1=A(n+5)+Bn\,.$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/5$, natomiast przyjęcie $n=-5$ daje $B=-1/5$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+5n}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+5}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{12}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N+2}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+3}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+4}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+5}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}-\frac{1}{N+4}-\frac{1}{N+5}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do

$$\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{60+30+20+15+12}{60}=\frac{137}{300}\,.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą 137/300.

755. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^3-4n}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A, B i C że

$$\frac{1}{n^3-4n}=\frac{1}{(n-2)\cdot n\cdot(n+2)}=\frac{A}{n-2}+\frac{B}{n}+\frac{C}{n+2}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(n-2)\cdot n\cdot(n+2)$ otrzymujemy

$$1=A\cdot n\cdot(n+2)+B\cdot(n-2)\cdot(n+2)+C\cdot(n-2)\cdot n\,.$$

Dla $n=2$ otrzymujemy $A=1/8$, dla $n=0$ dostajemy $B=-1/4$, natomiast przyjęcie $n=-2$ daje $C=1/8$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n^3-4n}=\frac{1}{8}\cdot\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{6}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+\frac{1}{9}\right)+\ldots\right.$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{N-6}-\frac{2}{N-4}+\frac{1}{N-2}\right)+\left(\frac{1}{N-5}-\frac{2}{N-3}+\frac{1}{N-1}\right)+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{N-4}-\frac{2}{N-2}+\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{2}{N-1}+\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{2}{N}+\frac{1}{N+2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do

$$\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{12+6-4-3}{12}=\frac{11}{96}\,.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą 11/96.

Uwaga: Nieco prostsze rachunkowo rozwiązanie może być oparte na tożsamości

$$\frac{1}{(n-2)\cdot n\cdot(n+2)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{(n-2)\cdot n}-\frac{1}{n\cdot(n+2)}\right),$$

pod warunkiem, że na nią jakoś wpadniemy.

756. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozłóżmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+4}\,,$$

$$1=A\cdot(n+1)\cdot(n+4)+B\cdot n\cdot(n+4)+C\cdot n\cdot(n+1)\,,$$

$$\text{dla } n=0: \qquad 1=4A, \qquad A=1/4\,,$$

$$\text{dla } n=-1: \qquad 1=-3B, \qquad B=-1/3\,,$$

$$\text{dla } n=-4: \qquad 1=12C, \qquad C=1/12\,.$$

Zatem

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}=\frac{1/4}{n}-\frac{1/3}{n+1}+\frac{1/12}{n+4}\,.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1/4}{n}-\frac{1/3}{n+1}+\frac{1/12}{n+4}\right)=$$

$$=\left(\frac{1/4}{1}-\frac{1/3}{2}+\frac{1/12}{5}\right)+\left(\frac{1/4}{2}-\frac{1/3}{3}+\frac{1/12}{6}\right)+\left(\frac{1/4}{3}-\frac{1/3}{4}+\frac{1/12}{7}\right)+$$

$$+\left(\frac{1/4}{4}-\frac{1/3}{5}+\frac{1/12}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1/4}{N-3}-\frac{1/3}{N-2}+\frac{1/12}{N+1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1/4}{N-2}-\frac{1/3}{N-1}+\frac{1/12}{N+2}\right)+\left(\frac{1/4}{N-1}-\frac{1/3}{N}+\frac{1/12}{N+3}\right)+\left(\frac{1/4}{N}-\frac{1/3}{N+1}+\frac{1/12}{N+4}\right)=$$

$$=\frac{1/4}{1}-\frac{1/12}{2}-\frac{1/12}{3}-\frac{1/12}{4}-\frac{1/4}{N+1}+\frac{1/12}{N+2}+\frac{1/12}{N+3}+\frac{1/12}{N+4}=$$

$$=\frac{23}{144}-\frac{1/4}{N+1}+\frac{1/12}{N+2}+\frac{1/12}{N+3}+\frac{1/12}{N+4}\to\frac{23}{144}$$

przy $N\to\infty$.

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa 23/144.

Niech

$$a_n = \frac{120}{n(n+1)(n+2)} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Wiadomo, że wówczas szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 30.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

757. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) =$ **40**

758. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) =$ **20**

759. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) =$ **600**

760. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) =$ **150**

761. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) =$ **400**

762. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+2}^2\right) =$ **425**

763. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+3}^2\right) =$ **429**

764. $\sum\limits_{\mathbf{n=2}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ **31**

765. $\sum\limits_{\mathbf{n=3}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ **3**

766. $\sum\limits_{\mathbf{n=4}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ **1**

Niech

$$a_n = \frac{60}{n(n+1)} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 60.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

767. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) =$ **90**

768. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) =$ **30**

769. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) =$ **1800**

770. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) =$ **600**

771. $\sum_{\mathbf{n=3}}^{\infty} a_n =$ **20**

772. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^3 - a_{n+1}^3\right) =$ **27000**

773. $\sum_{n=1}^{\infty} \left((a_n - a_{n+1}) \cdot (a_n + a_{n+1})\right) =$ **900**

774. $\sum_{\mathbf{n=3}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ **31**

775. $\sum_{\mathbf{n=4}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ **7**

776. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_n^2 + 1600} - \sqrt{a_{n+1}^2 + 1600}\,\right) =$ **10**

W każdym z poniższych 5 zadań podaj w postaci uproszczonej sumę szeregu.

777. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=\mathbf{0}$

778. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$

779. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+3]{n+3}\right)=\boldsymbol{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}-2}$

780. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$

781. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=\boldsymbol{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}-2}$

Niech $a_n=\frac{120}{n(n+2)}$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 90.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

782. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=$ **140** **783.** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=$ **40**

784. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+1}^2\right)=$ **1600** **785.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+2}^2\right)=$ **1825**

786. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+3}^2\right)=$ **1889** **787.** $\sum_{\mathbf{n=4}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ **31**

788. $\sum_{\mathbf{n=6}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ $\boldsymbol{4\sqrt{2}-1}$ **789.** $\sum_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ **1**

790. $\sum_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(3^{a_n}-3^{a_{n+1}}\right)=$ **2** **791.** $\sum_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(4^{a_n}-4^{a_{n+1}}\right)=$ **3**