Zbadać, czy funkcja f określona podanym wzorem ma ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne) w podanym punkcie x_0.

719. $f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}$, $x_0=0$

NIE

720. $f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$, $x_0=0$

MIN

721. $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$, $x_0=0$

MIN

722. $f(x)=2\cos x+\ln\left(1+x^2\right)$, $x_0=0$

MAX

723. $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$, $x_0=0$

NIE

724. $f(x)=\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}$, $x_0=1$

MAX

725. Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f=[a,b]$ ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(i) $f'(a^+)>0$

MIN

(ii) $f'(a^+)<0$

MAX

(iii) $f'(a^+)=0$, $f''(a^+)>0$

MIN

(iv) $f'(a^+)=0$, $f''(a^+)<0$

MAX

(v) $f'(a^+)=f''(a^+)=0$, $f'''(a^+)>0$

MIN

(vi) $f'(a^+)=f''(a^+)=0$, $f'''(a^+)<0$

MAX

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(vii) $f'(b^-)>0$

MAX

(viii) $f'(b^-) < 0$

MIN

(ix) $f'(b^-) = 0, \;\; f''(b^-) > 0$

MIN

(x) $f'(b^-) = 0, \;\; f''(b^-) < 0$

MAX

(xi) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0, \;\; f'''(b^-) > 0$

MAX

(xii) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0, \;\; f'''(b^-) < 0$

MIN

729. W zadaniach **729.1–729.10** funkcja f_k jest określona wzorem

$$f_k(x) = x^k \cdot \ln(1+x)\,.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartość pochodnej wskazanego rzędu w zerze.

729.1. $f_1''(0) = \mathbf{2}$ **729.2.** $f_1'''(0) = \mathbf{-3}$

729.3. $f_1^{(4)}(0) = \mathbf{8}$ **729.4.** $f_1^{(5)}(0) = \mathbf{-30}$

729.5. $f_2'''(0) = \mathbf{6}$ **729.6.** $f_2^{(4)}(0) = \mathbf{-12}$

729.7. $f_2^{(5)}(0) = \mathbf{40}$ **729.8.** $f_3^{(4)}(0) = \mathbf{24}$

729.9. $f_3^{(5)}(0) = \mathbf{-60}$ **729.10.** $f_4^{(5)}(0) = \mathbf{120}$

730. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^2 \cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0) = \mathbf{110}$ **b)** $f^{(10)}(0) = \mathbf{90}$

c) $f^{(9)}(0) = \mathbf{72}$ **d)** $f^{(8)}(0) = \mathbf{56}$

731. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^3 \cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0) = \mathbf{24}$ **b)** $f^{(6)}(0) = \mathbf{120}$

c) $f^{(10)}(0) = \mathbf{720}$ **d)** $f^{(11)}(0) = \mathbf{990}$

732. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^{100} \cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(100)}(0) = \mathbf{100!}$ **b)** $f^{(101)}(0) = \mathbf{101!}$

c) $f^{(102)}(0)=\mathbf{102!/2}$ **d)** $f^{(103)}(0)=\mathbf{103!/6}$

733. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\sin^2 x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0)=\mathbf{-8}$ **b)** $f^{(5)}(0)=\mathbf{0}$

c) $f^{(6)}(0)=\mathbf{32}$ **d)** $f^{(8)}(0)=\mathbf{-128}$

734. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\frac{x\cdot\ln(1+x)}{12!}\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0)=\mathbf{-1/120}$ **b)** $f^{(12)}(0)=\mathbf{1/11}$

c) $f^{(13)}(0)=\mathbf{-13/12}$ **d)** $f^{(14)}(0)=\mathbf{14}$

735. Niech $f(x)=e^{x^5}$. Obliczyć $f^{(2020)}(0)$ i $f^{(2021)}(0)$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takiej funkcji gładkiej g, że

$$e^x=\sum_{k=0}^{404}\frac{x^k}{k!}+x^{405}\cdot g(x)\,.$$

Wobec tego

$$f(x)=e^{x^5}=\sum_{k=0}^{404}\frac{x^{5k}}{k!}+x^{2025}\cdot g\left(x^5\right)$$

i w konsekwencji

$$f^{(2020)}(x)=\frac{2020!}{404!}+\frac{d^{2020}}{dx^{2020}}\left(x^{2025}\cdot g\left(x^5\right)\right)\,.$$

Zatem

$$f^{(2020)}(0)=\frac{2020!}{404!}\,.$$

Analogicznie

$$f^{(2021)}(x)=\frac{d^{2021}}{dx^{2021}}\left(x^{2025}\cdot g\left(x^5\right)\right)\,,$$

skąd

$$f^{(2021)}(0)=0\,.$$

736. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\ln(1+x)+e^{-x}+ax^3$$

spełniała warunek

$$f'''(0)=0\,.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takich funkcji gładkich g i h, że

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+x^5\cdot g(x)$$

oraz

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+x^5\cdot h(x)\,.$$

Zatem

$$\ln(1+x)+e^{-x}=1+\frac{x^3}{6}-\frac{5\cdot x^4}{24}+x^5\cdot(g(x)+h(x))\,.$$

Stąd wynika, że warunki zadania spełnia $a=-1/6$ i wówczas

$$f(x)=1-\frac{5\cdot x^4}{24}+x^5\cdot(g(x)+h(x))=1+\left(\frac{-5}{24}+x\cdot(g(x)+h(x))\right)\cdot x^4$$

ma w zerze lokalne maksimum, gdyż

$$\frac{-5}{24}+x\cdot(g(x)+h(x))<0$$

dla x bliskich 0.

737. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\sin\left(x^3\right)+a\cdot\sin\left(x^5\right)$$

spełniała warunek

$$f^{(15)}(0)=0\,.$$

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takiej funkcji gładkiej g, że

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^7\cdot g(x)\,.$$

Zatem

$$f(x)=\sin\left(x^3\right)+a\cdot\sin\left(x^5\right)=x^3-\frac{x^9}{6}+\frac{x^{15}}{120}+x^{21}\cdot g\left(x^3\right)+a\cdot x^5-\frac{a\cdot x^{15}}{6}+\frac{a\cdot x^{25}}{120}+a\cdot x^{35}\cdot g\left(x^5\right)=$$

$$=x^3+a\cdot x^5-\frac{x^9}{6}+\frac{(1-20\cdot a)\cdot x^{15}}{120}+x^{21}\cdot\left(g\left(x^3\right)+\frac{a\cdot x^4}{120}+a\cdot x^{14}\cdot g\left(x^5\right)\right)\,.$$

Warunek $f^{(15)}(0)=0$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy współczynnik przy x^{15} jest równy 0, czyli dla $a=1/20$.