

Zadania do omówienia¹ na ćwiczeniach w czwartek² 30.01.2025.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

15. Wzór Taylora.

Przypominam wzór Taylora w zerze z użyteczną dla niektórych zadań postacią reszty:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + x^{n+1} \cdot g(x),$$

gdzie g jest funkcją gładką, czyli C^∞ , czyli mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów w otoczeniu zera. Oczywiście musimy założyć, że funkcja f jest gładka w otoczeniu zera, ale to na ogół jest prawdą w przykładach, które spotykamy na swojej drodze.

Ogólna, nieco bardziej sformalizowana, wersja wzoru Taylora w tej postaci wygląda następująco:

Niech f będzie funkcją gładką w otoczeniu punktu x_0 . Wówczas dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka funkcja g_n gładka w otoczeniu x_0 , że dla każdego x odpowiednio bliskiego³ x_0 zachodzi równość

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + (x - x_0)^{n+1} \cdot g_n(x).$$

Do tego trzeba dodać następujące spostrzeżenia⁴:

Po pierwsze:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^n = n!$$

Po drugie, dla $k > n$:

$$\frac{d^k}{dx^k} x^n = 0$$

I wreszcie po trzecie:

Wobec równości

$$\frac{d}{dx} (x^n \cdot h(x)) = x^{n-1} \cdot (n \cdot h(x) + x \cdot h'(x))$$

przez indukcję możemy udowodnić, że dla $k < n$ istnieje taka funkcja h_k , że

$$\frac{d^k}{dx^k} (x^n \cdot h(x)) = x^{n-k} \cdot h_k(x),$$

a to ma w zerze wartość zero. Stąd wniosek, że dla gładkiej funkcji h oraz $k < n$ zachodzi

$$\left. \frac{d^k}{dx^k} (x^n \cdot h(x)) \right|_{x=0} = 0,$$

gdzie przez $F(x) \Big|_{x=a}$ rozumiemy $F(a)$.¹Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.²Ćwiczenia w poniedziałek 3 lutego 2025 będą miały charakter przedegzaminacyjnych konsultacji powtórzeniowych. Wtedy można też będzie wyjaśnić ewentualne wątpliwości, jakie pozostaną po omówieniu tej listy.³Sformułowanie "Dla każdego x odpowiednio bliskiego x_0 ..." można sformalizować jako: Istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$...⁴Dla uproszczenia te spostrzeżenia są sformułowane dla $x_0 = 0$.

Zbadać, czy funkcja f określona podanym wzorem ma ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne) w podanym punkcie x_0 .

719. $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2}$, $x_0 = 0$

720. $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$, $x_0 = 0$

721. $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$, $x_0 = 0$

722. $f(x) = 2 \cos x + \ln(1+x^2)$, $x_0 = 0$

723. $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$, $x_0 = 0$

724. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$, $x_0 = 1$

725. Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f = [a, b]$ ciągle pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

- (i) $f'(a^+) > 0$
- (ii) $f'(a^+) < 0$
- (iii) $f'(a^+) = 0$, $f''(a^+) > 0$
- (iv) $f'(a^+) = 0$, $f''(a^+) < 0$
- (v) $f'(a^+) = f''(a^+) = 0$, $f'''(a^+) > 0$
- (vi) $f'(a^+) = f''(a^+) = 0$, $f'''(a^+) < 0$

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

- (vii) $f'(b^-) > 0$
- (viii) $f'(b^-) < 0$
- (ix) $f'(b^-) = 0$, $f''(b^-) > 0$
- (x) $f'(b^-) = 0$, $f''(b^-) < 0$
- (xi) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0$, $f'''(b^-) > 0$
- (xii) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0$, $f'''(b^-) < 0$

726. Dobrać takie liczby rzeczywiste a, b, c , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{1+x} + ax + bx^2 + cx^3$$

spełniała warunek

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

727. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \ln(1+x) + e^{-x} + ax^3$$

spełniała warunek

$$f'''(0) = 0.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

728. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \ln(1+x) + a \cdot e^x$$

miała w zerze (lokalne) ekstremum. Jakie to ekstremum?

729. W zadaniach **729.1–729.10** funkcja f_k jest określona wzorem

$$f_k(x) = x^k \cdot \ln(1+x).$$

W każdym z tych zadań podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej wskazanego rzędu w zerze.

729.1. $f_1''(0) = \dots\dots\dots$

729.2. $f_1'''(0) = \dots\dots\dots$

729.3. $f_1^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$

729.4. $f_1^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$

729.5. $f_2'''(0) = \dots\dots\dots$

729.6. $f_2^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$

729.7. $f_2^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$

729.8. $f_3^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$

729.9. $f_3^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$

729.10. $f_4^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$

730. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^2 \cdot e^x.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0) = \dots\dots$ **b)** $f^{(10)}(0) = \dots\dots$ **c)** $f^{(9)}(0) = \dots\dots$ **d)** $f^{(8)}(0) = \dots\dots$

731. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^3 \cdot e^x.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0) = \dots\dots$ **b)** $f^{(6)}(0) = \dots\dots$ **c)** $f^{(10)}(0) = \dots\dots$ **d)** $f^{(11)}(0) = \dots\dots$

732. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^{100} \cdot e^x.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(100)}(0) = \dots\dots$ **b)** $f^{(101)}(0) = \dots\dots$ **c)** $f^{(102)}(0) = \dots\dots$ **d)** $f^{(103)}(0) = \dots\dots$

733. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \sin^2 x.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0) = \dots$ **b)** $f^{(5)}(0) = \dots$ **c)** $f^{(6)}(0) = \dots$ **d)** $f^{(8)}(0) = \dots$

734. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln(1+x)}{12!}.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0) = \dots$ **b)** $f^{(12)}(0) = \dots$ **c)** $f^{(13)}(0) = \dots$ **d)** $f^{(14)}(0) = \dots$

735. Niech $f(x) = e^{x^5}$. Obliczyć $f^{(2020)}(0)$ i $f^{(2021)}(0)$.

736. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \ln(1+x) + e^{-x} + ax^3$$

spełniała warunek

$$f'''(0) = 0.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

737. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sin(x^3) + a \cdot \sin(x^5)$$

spełniała warunek

$$f^{(15)}(0) = 0.$$

738. Przy okazji reguły de l'Hospitala rozwiązywaliśmy takie oto zadanko:

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - e^{2x} - \ln(1+x)}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązać powyższe zadanie korzystając ze wzoru Taylora i przy okazji obliczyć $f''(0)$, $f'''(0)$ oraz $f^{(4)}(0)$.

739. Przy okazji reguły de l'Hospitala rozwiązywaliśmy takie oto zadanko:

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2xe^{-x} - \ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązać powyższe zadanie korzystając ze wzoru Taylora i przy okazji obliczyć $f''(0)$, $f'''(0)$ oraz $f^{(4)}(0)$.