667. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\ln x-\sqrt{x}\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(16)+f(18) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(17)\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

skąd nierówność $f''(x)>0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}>0\,,$$

$$\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}>\frac{1}{x^2}\,,$$

$$\sqrt{x}>4\,,$$

$$x>16\,.$$

Zatem f jest ściśle wypukła w przedziale $[16;+\infty)$, skąd

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

czyli

$$f(x)+f(y)>2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y\geqslant 16$.

W szczególności

$$f(16)+f(18)>2\cdot f(17)\,.$$

668. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\ln x-\sqrt[3]{x}\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(89)+f(91) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(90)\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{3\cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{9\cdot x^{5/3}}\,,$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{9\cdot x^{5/3}}<0\,,$$

$$\frac{2}{9\cdot x^{5/3}}<\frac{1}{x^2}\,,$$

$$x^{1/3}<\frac{9}{2}\,,$$

$$x<\frac{9^3}{2^3}=\frac{729}{8}=91,125\,.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $(0;\,91,125)$, skąd

$$f(x)+f(y)<2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y<91,125$.

W szczególności

$$f(89)+f(91)<2\cdot f(90)\,.$$

Uwaga: Bezpośrednie obliczenia pokazują, że

$$f(89)+f(91)\approx \mathbf{0,036809}335389$$

oraz

$$2\cdot f(90)\approx \mathbf{0,036809}847546\,,$$

co wydaje się skutecznie odbierać wszelką nadzieję na rozwiązanie zadania poprzez bezpośrednie szacowanie każdej z podanych liczb z osobna.

669. Niech $f:(0,\,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(61)+f(63)\qquad\text{czy}\qquad 2\cdot f(62)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x < 64\,,$$

co oznacza, że $f''(x) > 0$ dla $x \in (0, 64)$ oraz $f''(x) > 0$ dla $x \in (64, \infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0, 64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64, \infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0, 64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x = 61$ oraz $y = 63$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(61)+f(63) > 2\cdot f(62)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(61)+f(63)$ jest większa od liczby $2\cdot f(62)$.

670. Niech $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 2\cdot \ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(65)+f(67) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(66)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} - \frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x) > 0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2} > 0\,,$$

$$\frac{2}{x^2} > \frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8 > \sqrt{x}\,,$$

$$x < 64\,,$$

co oznacza, że $f''(x) > 0$ dla $x \in (0, 64)$ oraz $f''(x) > 0$ dla $x \in (64, \infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0, 64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64, \infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64, \infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} < f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x = 65$ oraz $y = 67$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(65)+f(67) < 2\cdot f(66)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(65)+f(67)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(66)$.

671. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$\operatorname{arctg} 100+2\cdot\operatorname{arctg} 103+3\cdot\operatorname{arctg} 106 \qquad \text{czy} \qquad 6\cdot\operatorname{arctg} 104\ ?$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x)=\operatorname{arctg} x$. Ponieważ jej pochodna $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ jest malejąca na przedziale $(0, +\infty)$, funkcja f jest na tym przedziale ściśle wklęsła.

Zatem na mocy nierówności Jensena dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich x_1, x_2 i x_3 oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2 i a_3 spełniających warunek $a_1+a_2+a_3=1$ zachodzi

$$f\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)>a_1f\left(x_1\right)+a_2f\left(x_2\right)+a_3f\left(x_3\right)\ ,$$

co dla $x_1=100$, $x_2=103$, $x_3=106$, $a_1=1/6$, $a_2=1/3$, $a_3=1/2$ prowadzi do nierówności

$$f(104)>\frac{f(100)}{6}+\frac{f(103)}{3}+\frac{f(106)}{2}\ ,$$

gdyż wówczas

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\frac{100}{6}+\frac{103}{3}+\frac{106}{2}=\frac{100+2\cdot 103+3\cdot 106}{6}=\frac{624}{6}=104\,.$$

Mnożąc udowodnioną nierówność stronami przez 6 i podstawiając $f(x)=\operatorname{arctg} x$ otrzymujemy

$$6\cdot\operatorname{arctg} 104>\operatorname{arctg} 100+2\cdot\operatorname{arctg} 103+3\cdot\operatorname{arctg} 106\,.$$

Uwaga:

Bezpośrednie wyliczenia pokazują, że

$$\operatorname{arctg} 100+2\cdot\operatorname{arctg} 103+3\cdot\operatorname{arctg} 106\approx\mathbf{9,3670}60$$

oraz

$$6\cdot\operatorname{arctg} 104\approx\mathbf{9,3670}87\,.$$

Różnica między porównywanymi liczbami jest więc zbyt mała, aby można sobie wyobrazić ich porównanie bez użycia komputera przez oszacowanie każdej z nich z osobna.

672. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\operatorname{arctg} 3+\operatorname{arctg} 5+2\cdot\ln 4 \qquad \text{czy} \qquad \ln 3+\ln 5+2\cdot\operatorname{arctg} 4\,.$$

Rozwiązanie:

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x)=\operatorname{arctg} x-\ln x$. Wówczas

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{-2x^3+x^4+2x^2+1}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^3\cdot(x-2)+x^4+2x^2+1}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)^2}\ ,$$

co na pewno jest dodatnie dla $x>2$. Wobec tego funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(2,+\infty)$. Na mocy nierówności Jensena otrzymujemy więc

$$f(4)<\frac{f(3)+f(5)}{2}\ ,$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom:

$$2f(4) < f(3) + f(5)\,,$$

$$2\,\mathrm{arctg}\,4 - 2\ln 4 < \mathrm{arctg}\,3 - \ln 3 + \mathrm{arctg}\,5 - \ln 5\,,$$

$$2\,\mathrm{arctg}\,4 + \ln 3 + \ln 5 < \mathrm{arctg}\,3 + \mathrm{arctg}\,5 + 2\ln 4\,.$$

Odpowiedź:

$$\mathrm{arctg}\,3 + \mathrm{arctg}\,5 + 2\cdot\ln 4 \qquad > \qquad \ln 3 + \ln 5 + 2\cdot\mathrm{arctg}\,4\,.$$

673. Niech funkcja $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}\,,$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(6)+f(8) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(7)\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f w przedziale $(0,+\infty)$ otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3\cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9\cdot x^{4/3}} - \frac{2\cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9\cdot x^{5/3}}\,,$$

skąd nierówność $f''(x) < 0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9\cdot x^{4/3}} - \frac{2\cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9\cdot x^{5/3}} < 0\,,$$

$$x^{1/3} < 2\,,$$

$$x < 8\,.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[0;8]$, skąd

$$f(x)+f(y) < 2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x,y\leqslant 8$.

W szczególności

$$f(6)+f(8) < 2\cdot f(7)\,.$$

674. Niech funkcja $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=e^{\sqrt[4]{x}}\,,$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(79)+f(81)=\mathbf{39,79911}...\qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(80)=\mathbf{39,79911}...\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}$$

oraz

$$f''(x)=e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}\cdot\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}-e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{3}{16\cdot x^{7/4}}=e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{x^{1/4}-3}{16\cdot x^{7/4}}\,,$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$x^{1/4}-3<0\,,$$

$$x^{1/4}<3\,,$$

$$x<81\,.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[0;81]$, skąd

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

czyli

$$f(x)+f(y)<2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y\in[0;81]$.

W szczególności

$$f(79)+f(81)<2\cdot f(80)\,.$$

675. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-10\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(1600)+f(1602)=-\mathbf{67,54267816}...\qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(1601)=-\mathbf{67,54267816}...\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{10}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{10}{x^2}\,,$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{10}{x^2}<0\,,$$

$$\frac{1}{4\cdot x^{3/2}} > \frac{10}{x^2}\,,$$
$$\sqrt{x} > 40\,,$$
$$x > 1600\,.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[1600;+\infty)$, skąd
$$\frac{f(x)+f(y)}{2} < f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$
czyli
$$f(x)+f(y) < 2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y \geqslant 1600$.

W szczególności
$$f(1600)+f(1602) < 2\cdot f(1601)\,.$$

676. Niech $f(x)=\sqrt[3]{x^2+432}$. Rozstrzygnąć, czy liczba
$$f(36,001)=f(36001/1000)\approx \mathbf{12{,}0001666666667}$$
jest mniejsza czy większa od
$$\frac{72001}{6000}=12+\frac{1}{6000}\approx \mathbf{12{,}0001666666667}\,.$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy
$$f'(x)=\frac{2x}{3\cdot\left(x^2+432\right)^{2/3}}$$
oraz
$$f''(x)=\frac{2}{3\cdot\left(x^2+432\right)^{2/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}=\frac{6\cdot\left(x^2+432\right)}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}=$$
$$\frac{6x^2+6\cdot 432-8x^2}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}=\frac{-2x^2+2\cdot 36^2}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}=\frac{2\cdot\left(-x^2+36^2\right)}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}<0$$
dla $x>36$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[36,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>36$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 36. Ponieważ $f(36)=12$ oraz $f'(36)=1/6$, dla $x>36$ zachodzi nierówność $f(x)<12+(x-36)/6$ i w konsekwencji
$$f(36,001)<12+\frac{0,001}{6}=12+\frac{1}{6000}=\frac{72000}{6000}+\frac{1}{6000}=\frac{72001}{12}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(36,001)$ jest mniejsza od $72001/6000$.

677. Dowieść, że nierówność
$$(n+1)^{3n+3} < n^{2n} \cdot (n+3)^{n+3}$$
zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej $n > 0$.

Rozwiązanie:

Po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie e dana w zadaniu nierówność przybiera postać
$$3 \cdot f(n+1) < 2 \cdot f(n) + f(n+3)\,, \qquad (\spadesuit)$$
gdzie $f(x) = x \cdot \ln x$ dla $x > 0$. Ponieważ $f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$ oraz $f''(x) = 1/x > 0$, funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0, +\infty)$, skąd wynika nierówność
$$f\left(\frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y\right) < \frac{2}{3} \cdot f(x) + \frac{1}{3} \cdot f(y)$$
prawdziwa dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y. W szczególności dla $x = n$ oraz $y = n+3$ otrzymujemy
$$f\left(\frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{3} \cdot (n+3)\right) < \frac{2}{3} \cdot f(n) + \frac{1}{3} \cdot f(n+3)\,,$$
czyli
$$f(n+1) < \frac{2}{3} \cdot f(n) + \frac{1}{3} \cdot f(n+3)\,,$$
a to po obustronnym pomnożeniu przez 3 daje nierówność $(\spadesuit)$.

678. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \\ W(x) & \text{dla} \quad 0 < x < 1 \\ x & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$
jest dwukrotnie różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Niech
$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g\,.$$

Aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna w zerze, muszą zachodzić warunki
$$W(0) = W'(0) = W''(0) = 0\,,$$
skąd
$$d = e = g = 0$$
i w konsekwencji
$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3\,.$$
Dwukrotną różniczkowalność funkcji f w jedynce otrzymamy pod warunkiem
$$W(1) = W'(1) = 1 \qquad \text{oraz} \qquad W''(1) = 0\,,$$
co wobec
$$W'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2$$

oraz

$$W''(x)=20ax^3+12bx^2+6cx$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a+b+c &= 1 \\ 5a+4b+3c &= 1 \\ 20a+12b+6c &= 0 \end{cases}$$

który ma rozwiązanie $a=3$, $b=-8$, $c=6$.

Odpowiedź: Wielomianem spełniającym warunki zadania jest $W(x)=3x^5-8x^4+6x^3$.

679. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x\leqslant -1 \\ W(x) & \text{dla} \quad -1<x<1 \\ 1 & \text{dla} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Niech

$$W(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+g\,.$$

Aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna w punkcie -1, muszą zachodzić warunki

$$W(-1)=-1 \qquad \text{oraz} \qquad W'(-1)=W''(-1)=0\,.$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji f w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1)=1 \qquad \text{oraz} \qquad W'(1)=W''(1)=0\,,$$

co wobec

$$W'(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e$$

oraz

$$W''(x)=20ax^3+12bx^2+6cx+2d$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} -a+b-c+d-e+g &= -1 \\ a+b+c+d+e+g &= 1 \\ 5a-4b+3c-2d+e &= 0 \\ 5a+4b+3c+2d+e &= 0 \\ -20a+12b-6c+2d &= 0 \\ 20a+12b+6c+2d &= 0 \end{cases} \tag{1}$$

Dodanie stronami równań pierwszego i drugiego, odjęcie trzeciego i czwartego, dodanie piątego i szóstego daje po uproszczeniu

$$\begin{cases} b+d+g &= 0 \\ 2b+d &= 0 \\ 6b+d &= 0 \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy $b=d=g=0$. W konsekwencji układ równań (1) po uproszczeniu przyjmuje postać

$$\begin{cases} a+c+e &= 1 \\ 5a+3c+e &= 0 \\ 10a+3c &= 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a=3/8$, $c=-5/4$, $e=15/8$.

Odpowiedź: Wielomianem spełniającym warunki zadania jest

$$W(x)=\frac{3x^5-10x^3+15x}{8}\,.$$

680. Niech

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?
b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{e^h-1}{h}-A}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^h-1-A\cdot h}{h^2}\,.$$

Przy $h\to0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{e^h-A}{2h}\,.$$

Przy $h\to0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{e^h}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

W celu obliczenia pochodnej drugiego rzędu w zerze musimy najpierw obliczyć pierwszą pochodną poza zerem:

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}\,.$$

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f''(0)=\lim_{h\to0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{e^h\cdot h-e^h+1}{h^2}-1/2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^h\cdot h-e^h+1-\frac{h^2}{2}}{h^3}\,.$$

Przy $h\to0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f''(0)=\lim_{h\to0}\frac{e^h\cdot h+e^h-e^h-h}{3h^2}=\lim_{h\to0}\frac{e^h\cdot h-h}{3h^2}=\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{3h}\,.$$

Przy $h \to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc ponownie zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^h}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1$ i wówczas $f'(0)=1/2$ oraz $f''(0)=1/3$.

681. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x) = x^5 + x\,.$$

Podać dwie pary liczb (n, w), gdzie n jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią) mniejszą od 100, a w liczbą wymierną, spełniające równanie

$$f''(n) = w\,.$$

Jeżeli licznik lub mianownik liczby w jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

$$f''(\mathbf{2}) = -\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{6^3}} = -\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{216}} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{54}} \qquad f''(\mathbf{34}) = -\frac{\mathbf{160}}{\mathbf{81^3}} = -\frac{\mathbf{160}}{\mathbf{3^{12}}}$$

682. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + x\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w trzech podanych punktach.

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = -\mathbf{1/4} \qquad f''\left(\frac{14}{3}\right) = -\mathbf{4/125} \qquad f''(12) = -\mathbf{3/500}$$

683. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + 2x\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w czterech podanych punktach.

$$f''\left(\frac{7}{3}\right) = -\mathbf{2/27} \qquad f''\left(\frac{20}{3}\right) = -\mathbf{1/54} \qquad f''(15) = -\mathbf{6/1331} \qquad f''\left(\frac{88}{3}\right) = -\mathbf{1/729}$$

684. Niech

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3+5}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(3{,}01) = f(301/100) \approx \mathbf{2{,}003375}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{16027}{8000} = 2 + \frac{27}{8000} = \mathbf{2{,}003375}$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{3x^2}{5\cdot\left(x^3+5\right)^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{6x}{5\cdot\left(x^3+5\right)^{4/5}}-\frac{36x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=\frac{30x\cdot\left(x^3+5\right)}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}-\frac{36x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=$$

$$\frac{30x^4+150x-36x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=\frac{150x-6x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=\frac{6x\cdot\left(25-x^3\right)}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}<0$$

dla $x>\sqrt[3]{25}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt[3]{25},\infty\right)$, zawierającym przedział $\left[\sqrt[3]{27},\infty\right)=[3,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>3$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x=3$. Ponieważ $f(3)=2$ oraz $f'(3)=27/80$, dla $x>3$ zachodzi nierówność

$$f(x)<2+\frac{27\cdot(x-3)}{80}$$

i w konsekwencji

$$f(3{,}01)<2+\frac{27\cdot 0{,}01}{80}=2+\frac{27}{8000}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(3{,}01)$ jest mniejsza od $16027/8000$.

685. Niech

$$f(x)=\sqrt[5]{x^3+5}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(4{,}08)\approx\mathbf{2{,}36}$$

jest mniejsza czy większa od

$$f(4)+0{,}027\approx\mathbf{2{,}36}$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{3x^2}{5\cdot\left(x^3+5\right)^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{6x}{5\cdot\left(x^3+5\right)^{4/5}}-\frac{36x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=\frac{30x\cdot\left(x^3+5\right)}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}-\frac{36x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=$$

$$\frac{30x^4+150x-36x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=\frac{150x-6x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=\frac{6x\cdot\left(25-x^3\right)}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}<0$$

dla $x>\sqrt[3]{25}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt[3]{25},\infty\right)$, zawierającym przedział $\left[\sqrt[3]{27},\infty\right)=[3,\infty)$, a funkcja f' jest w tym przedziale malejąca.

Zatem wykres funkcji f dla $x>4$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x=4$. Ponieważ $f'(4)<f'(3)=27/80$, dla $x>4$ zachodzą nierówności

$$f(x)<f(4)+f'(4)\cdot(x-4)<f(4)+\frac{27\cdot(x-4)}{80}$$

i w konsekwencji

$$f(4,08)<f(4)+\frac{27\cdot 0,080}{80}=f(4)+0,027\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(4,08)$ jest mniejsza od $f(4)+0,027$.

686. Niech

$$f(x)=\sqrt[3]{x^5-5}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(2,1)=f(21/10)\approx\mathbf{3,30}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{89}{27}=3+\frac{8}{27}\approx\mathbf{3,30}$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{5x^4}{3\cdot(x^5-5)^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{20x^3}{3\cdot(x^5-5)^{2/3}}-\frac{50x^8}{9\cdot(x^5-5)^{5/3}}=\frac{60x^3\cdot(x^5-5)}{9\cdot(x^5-5)^{5/3}}-\frac{50x^8}{9\cdot(x^5-5)^{5/3}}=$$

$$\frac{60x^8-300x^3-50x^8}{9\cdot(x^5-5)^{5/3}}=\frac{10x^8-300x^3}{9\cdot(x^5-5)^{5/3}}=\frac{10x^3\cdot(x^5-30)}{9\cdot(x^5-5)^{5/3}}>0$$

dla $x>\sqrt[5]{30}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $\left[\sqrt[5]{30},\,\infty\right)$, zawierającym przedział $\left[\sqrt[5]{32},\,\infty\right)=[2,\,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>2$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x=2$. Ponieważ $f(2)=3$ oraz $f'(2)=80/27$, dla $x>2$ zachodzi nierówność

$$f(x)>3+\frac{80\cdot(x-2)}{27}$$

i w konsekwencji

$$f(2,1)>3+\frac{80\cdot 0,1}{27}=3+\frac{8}{27}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(2,1)$ jest większa od $89/27$.

687. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz $f''(x)\geqslant 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{(x-y)^2}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję pomocniczą $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określoną wzorem

$$g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}\,.$$

Wówczas dla każdej liczby rzeczywistej x otrzymujemy

$$g''(x)=f''(x)-1\geqslant 1-1=0\,,$$

skąd wynika, że g jest funkcją wypukłą. Wobec tego dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\frac{g(x)+g(y)}{2}\geqslant g\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

co po wykorzystaniu definicji funkcji g daje kolejno:

$$\frac{f(x)-\frac{x^2}{2}+f(y)-\frac{y^2}{2}}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}{2}\,,$$

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{x^2+y^2}{4}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{(x+y)^2}{8}\,,$$

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{x^2+y^2}{4}-\frac{x^2+2xy+y^2}{8}\,,$$

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{2x^2+2y^2}{8}-\frac{x^2+2xy+y^2}{8}\,,$$

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{x^2-2xy+y^2}{8}\,,$$

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{(x-y)^2}{8}\,,$$

co należało dowieść.

Wstawić znak "$<$" albo "$>$" i udowodnić powstałą nierówność:

696. $e^x > 1+x$ dla $x>0$ **697.** $e^x < 1+2x$ dla $0<x<1$

698. $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$ **699.** $e^x < 1+x+x^2$ dla $0<x<1$

700. $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

701. $\ln(x+1) < x$ dla $x>0$ **702.** $\ln(x+1) > x-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

703. $\ln(x+1) < x$ dla $-1<x<0$ **704.** $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}$ dla $-1<x<0$

705. $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $x>0$

706. $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $-1<x<0$

707. $\ln(x+1) > \frac{x}{2}$ dla $0<x<2$

708. $\operatorname{arctg} x < x$ dla $x>0$ **709.** $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi x}{4}$ dla $0<x<1$

710. $\sin x < x$ dla $x>0$ **711.** $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

712. $\sin x > x-\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$ **713.** $\cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ dla $x>0$

714. $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{2}$ **715.** $\sin x > \frac{3x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{6}$

716. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2}$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y| .$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)| ,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Zatem najmniejsza stała C, z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru $\{|f'(x)|: x\in\mathbb{R}\}$.

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\frac{2x}{3\cdot(x^2+2)^{2/3}} .$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{3\cdot(x^2+2)^{2/3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^{-1/3}}{3\cdot(1+2\cdot x^{-2})^{2/3}}=0 .$$

Ponadto

$$f''(x)=\frac{2}{3\cdot(x^2+2)^{2/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot(x^2+2)^{5/3}} .$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się f'':

$$\frac{2}{3\cdot(x^2+2)^{2/3}}=\frac{8x^2}{9\cdot(x^2+2)^{5/3}} ,$$

$$3\cdot\left(x^2+2\right)=4x^2 ,$$

$$6=x^2 ,$$

$$x=\pm\sqrt{6} .$$

Wyliczamy wartości funkcji f' w miejscach zerowych jej pochodnej:

$$f'\left(\pm\sqrt{6}\right)=\frac{\pm 2\cdot\sqrt{6}}{3\cdot\left(\left(\pm\sqrt{6}\right)^2+2\right)^{2/3}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{3\cdot 8^{2/3}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{3\cdot 4}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} .$$

Stąd wynika, że funkcja f' przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/\sqrt{6}$ i $1/\sqrt{6}$, a zatem $C=1/\sqrt{6}$.

717. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\in(2,\,4)$ zachodzi nierówność
$$\log_2 x > \frac{x}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $f(x)=\log_2 x=\dfrac{\ln x}{\ln 2}$ oraz $g(x)=\dfrac{x}{2}$. Wówczas
$$f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln 2}\,.$$
Zatem funkcja f' jest malejąca w przedziale $(0,\,\infty)$, skąd wynika, że funkcja f jest funkcją ściśle wklęsłą.

Ponieważ $f(2)=g(2)=1$ oraz $f(4)=g(4)=2$, prosta będąca wykresem funkcji liniowej g jest sieczną wykresu funkcji f wyznaczoną przez punkty odpowiadające $x=2$ i $x=4$. Odcinek tej prostej zawarty między tymi punktami jest więc cięciwą wykresu funkcji f, a skoro f jest ściśle wklęsła, to leży on poniżej wykresu.

Zatem $f(x)>g(x)$ dla $x\in(2,\,4)$, co należało udowodnić.

718. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\in(3,\,5)$ zachodzi nierówność
$$\sqrt[7]{x^3+3}<\frac{x+7}{6}\,.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy
$$f(x)=\sqrt[7]{x^3+3}\,.$$
Różniczkując funkcję f otrzymujemy
$$f'(x)=\frac{3x^2}{7\cdot\left(x^3+3\right)^{6/7}}$$
oraz
$$f''(x)=\frac{6x}{7\cdot\left(x^3+3\right)^{6/7}}-\frac{54x^4}{49\cdot\left(x^3+3\right)^{13/7}}=\frac{42x\cdot\left(x^3+3\right)}{49\cdot\left(x^3+3\right)^{13/7}}-\frac{54x^4}{49\cdot\left(x^3+3\right)^{13/7}}=$$
$$\frac{42x^4+126x-54x^4}{49\cdot\left(x^3+3\right)^{13/7}}=\frac{-12x^4+126x}{49\cdot\left(x^3+3\right)^{13/7}}=\frac{6x\cdot\left(-2x^3+21\right)}{49\cdot\left(x^3+3\right)^{13/7}}<0$$
dla $x>\sqrt[3]{\dfrac{21}{2}}<3$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt[3]{\dfrac{21}{2}},\,\infty\right)$ zawierającym interesujący nas przedział $(3,\,5)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x\in(3,\,5)$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 5. Ponieważ $f(5)=2$ oraz $f'(5)=\dfrac{75}{448}>\dfrac{75}{450}=\dfrac{1}{6}$, dla $x\in(3,\,5)$ zachodzą nierówności[1]
$$\sqrt[7]{x^3+3}=f(x)<f(5)+(x-5)\cdot f'(5)=2+(x-5)\cdot\frac{75}{448}<2+(x-5)\cdot\frac{1}{6}=\frac{12+(x-5)}{6}=\frac{x+7}{6}\,,$$
co kończy rozwiązanie zadania.

[1] Po drodze należy uwzględnić, że liczba $x-5$ jest ujemna.