

Kolokwium nr 7: środa 29.01.2025, godz. 8:30–10:00, materiał zad. 1–718.

**Zadania do omówienia¹ na ćwiczeniach w poniedziałek 20.01.2025,
czwartek 23.01.2025 i poniedziałek 27.01.2025.**

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

14. Pochodna drugiego rzędu i wypukłość funkcji.

667. Niech funkcja $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt{x}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(16) + f(18) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(17) ?$$

668. Niech funkcja $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt[3]{x}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(89) + f(91) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(90) ?$$

669. Niech $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 \cdot \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(61) + f(63) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(62) ?$$

670. Niech $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 \cdot \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(65) + f(67) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(66) ?$$

671. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$\arctg 100 + 2 \cdot \arctg 103 + 3 \cdot \arctg 106 \quad \text{czy} \quad 6 \cdot \arctg 104 ?$$

672. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\arctg 3 + \arctg 5 + 2 \cdot \ln 4 \quad \text{czy} \quad \ln 3 + \ln 5 + 2 \cdot \arctg 4.$$

673. Niech funkcja $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x}},$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(6) + f(8) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(7) ?$$

¹Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

674. Niech funkcja $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[4]{x}},$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(79) + f(81) = \mathbf{39,79911\dots} \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(80) = \mathbf{39,79911\dots} ?$$

675. Niech funkcja $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 10 \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(1600) + f(1602) = \mathbf{-67,54267816\dots} \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(1601) = \mathbf{-67,54267816\dots} ?$$

676. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 432}$. Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(36,001) = f(36001/1000) \approx \mathbf{12,0001666666667}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{72001}{6000} = 12 + \frac{1}{6000} \approx \mathbf{12,0001666666667}.$$

677. Dowieść, że nierówność

$$(n+1)^{3n+3} < n^{2n} \cdot (n+3)^{n+3}$$

zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej $n > 0$.

678. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ W(x) & \text{dla } 0 < x < 1 \\ x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

679. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \leq -1 \\ W(x) & \text{dla } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

680. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

- a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?
 b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

681. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = x^5 + x.$$

Podać dwie pary liczb (n, w) , gdzie n jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią) mniejszą od 100, a w liczbą wymierną, spełniające równanie

$$f''(n) = w.$$

Jeżeli licznik lub mianownik liczby w jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

$$f''(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots \qquad f''(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$$

682. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w trzech podanych punktach.

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = \dots\dots\dots \qquad f''\left(\frac{14}{3}\right) = \dots\dots\dots \qquad f''(12) = \dots\dots\dots$$

683. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + 2x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w czterech podanych punktach.

$$f''\left(\frac{7}{3}\right) = \dots\dots\dots \qquad f''\left(\frac{20}{3}\right) = \dots\dots\dots \qquad f''(15) = \dots\dots\dots \qquad f''\left(\frac{88}{3}\right) = \dots\dots\dots$$

684. Niech

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 5}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(3,01) = f(301/100) \approx \mathbf{2,003375}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{16027}{8000} = 2 + \frac{27}{8000} = \mathbf{2,003375}$$

685. Niech

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 5}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(4,08) \approx \mathbf{2,36}$$

jest mniejsza czy większa od

$$f(4) + 0,027 \approx \mathbf{2,36}$$

686. Niech

$$f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 5}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(2, 1) = f(21/10) \approx \mathbf{3,30}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{89}{27} = 3 + \frac{8}{27} \approx \mathbf{3,30}$$

687. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz $f''(x) \geq 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{(x-y)^2}{8}.$$

Wyznaczyć punkty przegięcia i przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji zmiennej x danej wzorem:

688. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

689. $x^8 - x^2 + 7x - 15$

690. e^{-x^2}

691. $\sin^4 x$

692. $x^4 + \sqrt[4]{x}$

693. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ ":

LEMAT: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$.

Jeżeli dla każdego $x > a$ zachodzi nierówność $f'(x) < g'(x)$, to dla dowolnego $x > a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x < a$ zachodzi nierówność $f'(x) < g'(x)$, to dla dowolnego $x < a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

694. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ ":

LEMAT: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$ oraz $f'(a) = g'(a)$.

Jeżeli dla każdego $x > a$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x > a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x < a$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x < a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

695. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ ":

LEMAT: Niech $a < b$ będą liczbami rzeczywistymi i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$ oraz $f(b) = g(b)$.

Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f''(x) > g''(x)$, to dla dowolnego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

Wstawić znak " $<$ " albo " $>$ " i udowodnić powstałą nierówność:

696. $e^x \dots\dots\dots 1+x$ dla $x > 0$

697. $e^x \dots\dots\dots 1+2x$ dla $0 < x < 1$

698. $e^x \dots\dots\dots 1+x+\frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$

699. $e^x \dots\dots\dots 1+x+x^2$ dla $0 < x < 1$

700. $e^x \dots\dots\dots 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ dla $x > 0$

701. $\ln(x+1) \dots\dots\dots x$ dla $x > 0$

702. $\ln(x+1) \dots\dots\dots x-\frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$

703. $\ln(x+1) \dots\dots\dots x$ dla $-1 < x < 0$

704. $\ln(x+1) \dots\dots\dots x-\frac{x^2}{2}$ dla $-1 < x < 0$

705. $\ln(x+1) \dots\dots\dots x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $x > 0$

706. $\ln(x+1) \dots\dots\dots x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $-1 < x < 0$

707. $\ln(x+1) \dots\dots\dots \frac{x}{2}$ dla $0 < x < 2$

708. $\operatorname{arctg} x \dots\dots\dots x$ dla $x > 0$

709. $\operatorname{arctg} x \dots\dots\dots \frac{\pi x}{4}$ dla $0 < x < 1$

710. $\sin x \dots\dots\dots x$ dla $x > 0$

711. $\cos x \dots\dots\dots 1-\frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$

712. $\sin x \dots\dots\dots x-\frac{x^3}{6}$ dla $x > 0$

713. $\cos x \dots\dots\dots 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ dla $x > 0$

714. $\sin x \dots\dots\dots \frac{2x}{\pi}$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$

715. $\sin x \dots\dots\dots \frac{3x}{\pi}$ dla $0 < x < \frac{\pi}{6}$

716. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C , że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

717. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (2, 4)$ zachodzi nierówność

$$\log_2 x > \frac{x}{2}.$$

718. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (3, 5)$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[7]{x^3+3} < \frac{x+7}{6}.$$