W każdym z kolejnych 10 zadań zapisz w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości trzech pochodnych funkcji w podanym punkcie.

629. $f_1(x)=\sqrt{x}$ $f_1'(25)=\mathbf{1/10}$, $f_1''(25)=\mathbf{-1/500}$, $f_1'''(25)=\mathbf{3/25000}$

630. $f_2(x)=x\cdot\sqrt{x}$ $f_2'(1/4)=\mathbf{3/4}$, $f_2''(1/4)=\mathbf{3/2}$, $f_2'''(1/4)=\mathbf{-3}$

631. $f_3(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$ $f_3'(4)=\mathbf{20}$, $f_3''(4)=\mathbf{15/2}$, $f_3'''(4)=\mathbf{15/16}$

632. $f_4(x)=\sqrt[3]{x}$ $f_4'(1)=\mathbf{1/3}$, $f_4''(1)=\mathbf{-2/9}$, $f_4'''(1)=\mathbf{10/27}$

633. $f_5(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}$ $f_5'(1/27)=\mathbf{4/9}$, $f_5''(1/27)=\mathbf{4}$, $f_5'''(1/27)=\mathbf{-72}$

634. $f_6(x)=\ln x$ $f_6'(2)=\mathbf{1/2}$, $f_6''(2)=\mathbf{-1/4}$, $f_6'''(2)=\mathbf{1/4}$

635. $f_7(x)=x\cdot\ln x$ $f_7'(1)=\mathbf{1}$, $f_7''(1)=\mathbf{1}$, $f_7'''(1)=\mathbf{-1}$

636. $f_8(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_8'(1)=\mathbf{1/2}$, $f_8''(1)=\mathbf{-1/2}$, $f_8'''(1)=\mathbf{1/2}$

637. $f_9(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_9'(2)=\mathbf{1/5}$, $f_9''(2)=\mathbf{-4/25}$, $f_9'''(2)=\mathbf{22/125}$

638. $f_{10}(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_{10}'(3)=\mathbf{1/10}$, $f_{10}''(3)=\mathbf{-3/50}$, $f_{10}'''(3)=\mathbf{13/250}$

W każdym z kolejnych 4 zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

639. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$ $f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$ $f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

640. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

641. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$ $f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$ $f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

642. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$ $f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9=9/512}$ $f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)=1/432}$

643. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2019 funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x)=e^x\cdot\sin x\,.$$

Otrzymany wzór powienien mieć prostą postać, bez znaku "$\sum$", z co najwyżej dwoma znakami "$+$" i co najwyżej dwoma znakami "$-$".

Rozwiązanie:

Obliczając kolejne pochodne funkcji f otrzymujemy

$$f'(x)=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x\,,$$

$$f''(x)=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x+e^x\cdot\cos x-e^x\cdot\sin x=2\cdot e^x\cdot\cos x\,,$$

$$f'''(x)=2\cdot e^x\cdot\cos x-2\cdot e^x\cdot\sin x\,,$$

$$f^{(4)}(x)=2\cdot e^x\cdot\cos x-2\cdot e^x\cdot\sin x-2\cdot e^x\cdot\sin x-2\cdot e^x\cdot\cos x=-4\cdot e^x\cdot\sin x=-4\cdot f(x)\,,$$

skąd wynika, że czterokrotne zróżniczkowanie funkcji f jest równoważne z pomnożeniem jej przez -4.

Wobec tego

$$f^{(2019)}(x)=\frac{d^3}{dx^3}f^{(2016)}(x)=\frac{d^3}{dx^3}f^{(4\cdot 504)}(x)=\frac{d^3}{dx^3}(-4)^{504}f(x)=2^{1008}\cdot f'''(x)=$$

$$=2^{1008}\cdot(2\cdot e^x\cdot\cos x-2\cdot e^x\cdot\sin x)=2^{1009}\cdot e^x\cdot(\cos x-\sin x)\ .$$