

**Zadania do omówienia<sup>1</sup> na ćwiczeniach w czwartek 16.01.2025.**

Omawianie należy rozpocząć od zadania 643.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

**13. Pochodne wyższych rzędów.**

Operacja różniczkowania przypisuje funkcji  $f$  jej pochodną  $f'$ . Jeżeli dziedziną pochodnej nie jest zbyt zdegenerowana<sup>2</sup>, możemy do pochodnej ponownie zastosować operację różniczkowania otrzymując pochodną pochodnej funkcji  $f$ . Tak otrzymaną funkcję nazywamy drugą pochodną lub pochodną drugiego rzędu funkcji  $f$  i oznaczamy przez  $f''$ . Taką zabawę można kontynuować dalej różniczkując funkcję  $f''$  i otrzymując trzecią pochodną<sup>3</sup>  $f'''$ .

Możemy więc napisać

$$(f')' = f'' \quad \text{oraz} \quad (f'')' = f'''$$

lub

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{df(x)}{dx} \right) = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}.$$

Na przykład dla funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = x^{10}$  mamy

$$f'(x) = 10x^9, \quad f''(x) = 90x^8 \quad \text{oraz} \quad f'''(x) = 720x^7.$$

W podobny sposób możemy zdefiniować<sup>4</sup> pochodną dowolnego rzędu<sup>5</sup> naturalnego  $n$  jako efekt  $n$ -krotnego różniczkowania funkcji. Przy tym pochodne rzędu wyższego niż trzeci lub pochodne o rzędzie, który nie jest konkretną liczbą, zapisujemy w postaci  $f^{(n)}$ . Tak więc czwartą pochodną funkcji  $f$  zapiszemy<sup>6</sup> jako  $f^{(4)}$ .

Możemy więc przyjąć następującą definicję rekurencyjną

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

lub w innym zapisie

$$\frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right).$$

W uzupełnieniu do tej definicji przyjmujemy, że funkcja jest swoją pochodną zerowego rzędu. Oczywiście pisanie  $f^{(0)}$  zamiast  $f$  nie ma praktycznego sensu, ale użycie zapisu  $f^{(n)}$  w kontekście  $n$  mogącego przyjmować wartość 0 będzie przez nas w przyszłości stosowane.

<sup>1</sup>Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.<sup>2</sup>Formalnie rzecz biorąc, to różniczkować możemy nawet funkcję, która w żadnym punkcie nie jest różniczkowalna – po prostu jej pochodna jest funkcją o pustej dziedzinie i owa pochodna ma kolejną pochodną o pustej dziedzinie. Jednak chodzi nam tutaj nie o formalistyczne niuanse, a o różniczkowanie, które prowadzi do czegoś interesującego.<sup>3</sup>Przypominam, że  $f'$  czytamy jako "ef prim". Z kolei  $f''$  czytamy jako "ef bis", a  $f'''$  jako "ef ter".<sup>4</sup>To, że je sobie zdefiniujemy, nie oznacza jeszcze, że dla każdej funkcji będą istniały.<sup>5</sup>Możemy też powiedzieć:  $n$ -ta pochodna.<sup>6</sup>Jeśli ktoś bardzo mocno chce zapisać takie pochodne w notacji prim-bis-ter, to nie zapisujemy tych pochodnych dodając kolejne primy, ale imitując zapis rzymski z małymi literami. Nie napiszemy więc  $f''''$ , ale  $f^{iv}$ , przy czym zapis taki jest na tyle rzadko stosowany, że nie ma ustalonych reguł co do ewentualnego stawiania kropki nad "i".

W każdym z kolejnych 10 zadań zapisz w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości trzech pochodnych funkcji w podanym punkcie.

$$629. f_1(x) = \sqrt{x} \quad f'_1(25) = \dots\dots\dots, \quad f''_1(25) = \dots\dots\dots, \quad f'''_1(25) = \dots\dots\dots$$

$$630. f_2(x) = x \cdot \sqrt{x} \quad f'_2(1/4) = \dots\dots\dots, \quad f''_2(1/4) = \dots\dots\dots, \quad f'''_2(1/4) = \dots\dots\dots$$

$$631. f_3(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} \quad f'_3(4) = \dots\dots\dots, \quad f''_3(4) = \dots\dots\dots, \quad f'''_3(4) = \dots\dots\dots$$

$$632. f_4(x) = \sqrt[3]{x} \quad f'_4(1) = \dots\dots\dots, \quad f''_4(1) = \dots\dots\dots, \quad f'''_4(1) = \dots\dots\dots$$

$$633. f_5(x) = x \cdot \sqrt[3]{x} \quad f'_5(1/27) = \dots\dots\dots, \quad f''_5(1/27) = \dots\dots\dots, \quad f'''_5(1/27) = \dots\dots\dots$$

$$634. f_6(x) = \ln x \quad f'_6(2) = \dots\dots\dots, \quad f''_6(2) = \dots\dots\dots, \quad f'''_6(2) = \dots\dots\dots$$

$$635. f_7(x) = x \cdot \ln x \quad f'_7(1) = \dots\dots\dots, \quad f''_7(1) = \dots\dots\dots, \quad f'''_7(1) = \dots\dots\dots$$

$$636. f_8(x) = \operatorname{arctg} x \quad f'_8(1) = \dots\dots\dots, \quad f''_8(1) = \dots\dots\dots, \quad f'''_8(1) = \dots\dots\dots$$

$$637. f_9(x) = \operatorname{arctg} x \quad f'_9(2) = \dots\dots\dots, \quad f''_9(2) = \dots\dots\dots, \quad f'''_9(2) = \dots\dots\dots$$

$$638. f_{10}(x) = \operatorname{arctg} x \quad f'_{10}(3) = \dots\dots\dots, \quad f''_{10}(3) = \dots\dots\dots, \quad f'''_{10}(3) = \dots\dots\dots$$

W każdym z kolejnych 4 zadań podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

$$639. f_1(x) = \ln x$$

$$f_1^{(4)}(1) = \dots\dots\dots \quad f_1^{(4)}(2) = \dots\dots\dots \quad f_1^{(4)}(3) = \dots\dots\dots$$

$$640. f_2(x) = \sin x \cdot \cos x$$

$$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dots\dots\dots \quad f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dots\dots\dots \quad f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$$

$$641. f_3(x) = (2x+1)^{5/2}$$

$$f_3^{(4)}(0) = \dots\dots\dots \quad f_3^{(4)}(4) = \dots\dots\dots \quad f_3^{(4)}(12) = \dots\dots\dots$$

$$642. f_4(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$f_4^{(4)}(0) = \dots\dots\dots \quad f_4^{(4)}(3) = \dots\dots\dots \quad f_4^{(4)}(8) = \dots\dots\dots$$

**643.** Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2019 funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem

$$f(x) = e^x \cdot \sin x.$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, bez znaku "Σ", z co najwyżej dwoma znakami "+" i co najwyżej dwoma znakami "-".

**644.** Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb rzeczywistych  $(a, b)$ , że funkcja

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = e^{ax} \cdot \cos(bx)$$

jest równa swojej pochodnej trzeciego rzędu.

**645.** Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2022 funkcji

$$f(x) = e^x \sin(x\sqrt{3}).$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, nie zawierającą żadnego ze znaków "Σ", "+", "-".

**646.** Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2022 funkcji

$$f(x) = e^x \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right).$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, nie zawierającą żadnego ze znaków "Σ", "+", "-".

Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu  $n$  funkcji zmiennej  $x$  danej wzorem<sup>7</sup>:

**647.**  $\ln(x^{10})$       **648.**  $\sqrt{x}$       **649.**  $\sqrt[3]{x}$       **650.**  $e^{4x}$       **651.**  $xe^x$

**652.**  $\sin 5x$       **653.**  $\cos^2 x$       **654.**  $x^2 \ln x$       **655.**  $\ln(x^2 - 1)$       **656.**  $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$

**657.**  $\frac{1}{x+a}$       **658.**  $\frac{1}{(x+a)^2}$       **659.**  $\frac{1}{(x+2025)^{2025}}$       **660.**  $\frac{1}{x^2+x}$

**661.**  $\frac{1}{x^2-1}$       **662.**  $\frac{1}{x^3-x}$       **663.**  $\frac{1}{x^5-5x^3+4x}$       **664.**  $\frac{1}{x^4+2x^3+x^2}$

**665.** Dowieść, że

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{x^2} = W_n(x) \cdot e^{x^2},$$

gdzie  $W_n(x)$  jest wielomianem stopnia  $n$ . Wyprowadzić wzór na  $W_{n+1}(x)$  w zależności od  $W_n(x)$ .

**666.** Dowieść, że

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{x^7} = W_n(x) \cdot e^{x^7},$$

gdzie  $W_n(x)$  jest wielomianem stopnia  $6n$ . Wyprowadzić wzór na  $W_{n+1}(x)$  w zależności od  $W_n(x)$ . Dowieść, że  $W_n(x)$  ma postać  $V_n(x^7) \cdot x^{k_n}$ , gdzie  $k_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

<sup>7</sup>Wskazówka do niektórych zadań: rozłożyć funkcję na sumę wyrażeń postaci  $\frac{c}{x+a}$  lub  $\frac{c}{(x+a)^2}$ .