KOLOKWIUM nr 6, 15.01.2025, godz. 8:30–10:00

Zadanie **13. (10 punktów)**

Wyznacz asymptoty ukośne funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{16x^4+x^3}$.

Rozwiązanie:

Stosując procedurę wyznaczenia asymptot ukośnych otrzymujemy:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{16x^4+x^3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{16x^4+x^3}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{16+\frac{1}{x}}=2\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+x^3}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(16x^4+x^3)-16x^4}{\left(\sqrt[4]{16x^4+x^3}+2x\right)\cdot\left(\sqrt{16x^4+x^3}+4x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\left(\sqrt[4]{16x^4+x^3}+2x\right)\cdot\left(\sqrt{16x^4+x^3}+4x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{16+x^{-1}}+2\right)\cdot\left(\sqrt{16+x^{-1}}+4\right)}=$$

$$=\frac{1}{(2+2)\cdot(4+4)}=\frac{1}{32}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^4-t^4}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[4]{x^4}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{16x^4+x^3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{16x^4+x^3}}{-\sqrt[4]{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{\frac{16x^4+x^3}{x^4}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{16+\frac{1}{x}}\right)=-2\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+x^3}+2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(16x^4+x^3)-16x^4}{\left(\sqrt[4]{16x^4+x^3}-2x\right)\cdot\left(\sqrt{16x^4+x^3}+4x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{\left(\sqrt[4]{16x^4+x^3}-2x\right)\cdot\left(\sqrt{16x^4+x^3}+4x^2\right)}=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt[4]{16x^4+x^3}}{x}-2\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{16x^4+x^3}}{x^2}+4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt[4]{16x^4+x^3}}{-\sqrt[4]{x^4}}-2\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{16x^4+x^3}}{\sqrt{x^4}}+4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(-\sqrt[4]{16+x^{-1}}-2\right)\cdot\left(\sqrt{16+x^{-1}}+4\right)} =$$

$$= \frac{1}{(-2-2)\cdot(4+4)} = -\frac{1}{32}\,.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t = \frac{s^4-t^4}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)}$$

przy $s=\sqrt[4]{16x^4+x^3}>0$ i $t=x<0$, a więc w sytuacji, gdy $s-t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=2x+\frac{1}{32}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=-2x-\frac{1}{32}$.

Zadanie **14. (10 punktów)**

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2-5\cdot|x-1|$$

na przedziale $[-3, 3]$ oraz podaj, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{dla} \quad x\in[1, +\infty) \\ -x+1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty, 1) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+5 & \text{dla} \quad x\in[1, 3] \\ x^2+5x-5 & \text{dla} \quad x\in[-3, 1) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-3, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-5 & \text{dla} \quad x\in(1, 3) \\ 2x+5 & \text{dla} \quad x\in(-3, 1) \end{cases}$$

W punkcie 1 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(1, 3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $2x-5=0$, co ma rozwiązanie $x=5/2$, które należy do rozważanego przedziału $(1, 3)$.

2° W przypadku $x\in(-3, 1)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+5=0$, co ma rozwiązanie $x=-5/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-3, 1)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -3 i 3,
- miejsca zerowe pochodnej: $-5/2$ i $5/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: 1.

$$f(-3)=-11\,,$$

$$f(-5/2)=-45/4=-11\frac{1}{4}\,,$$

$$f(1)=1\,,$$

$$f(5/2)=-5/4\,,$$

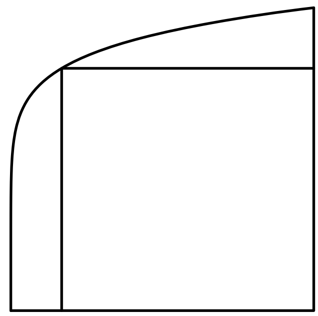
$$f(3)=-1\,.$$

Odpowiedź:

Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-45/4=-11\frac{1}{4}$ w punkcie $-5/2$, a wartość największą równą 1 w punkcie 1.

Zadanie **15. (10 punktów)**

W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz krzywą o równaniu $y=\sqrt[8]{x}$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



Rozwiązanie:

Niech $(a,\ \sqrt[8]{a})$, gdzie $a\in(0,\ 1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na krzywej.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a)=(1-a)\cdot\sqrt[8]{a}=a^{1/8}-a^{9/8}\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a\to 0^+}P(a)=\lim_{a\to 1^-}P(a)=0\,,$$

a ponadto

$$P'(a)=\frac{1}{8\cdot a^{7/8}}-\frac{9\cdot\sqrt[8]{a}}{8}\,.$$

Wobec tego $P'(a)=0$ dla $a=1/9$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{9}}=\frac{8}{9\cdot\sqrt[4]{3}}\,.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi $\dfrac{8}{9\cdot\sqrt[4]{3}}$.

Zadanie **16. (10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(x^9+64\right).$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych nieujemnych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 4\cdot|x-y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla każdej liczby rzeczywistej $x>0$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant 4,$$

czyli

$$\frac{9x^8}{x^9+64}\leqslant 4. \qquad (\spadesuit)$$

Nierówność ($\spadesuit$) można udowodnić różnymi sposobami.

Sposób I (dla koneserów nierówności między średnimi):

Z nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną zastosowanej[1] do ośmiu liczb x^9 i jednej liczby 512 otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[9]{x^{72}\cdot 512}\leqslant\frac{8x^9+512}{9},$$

$$2x^8\leqslant\frac{8x^9+512}{9},$$

$$9x^8\leqslant 4\cdot\left(x^9+64\right),$$

co stanowi nierówność ($\spadesuit$). To kończy rozwiązanie zadania.

[1] Liczby, do których stosujemy nierówność między średnimi, mogą wyglądać na wyciągnięte z kapelusza. Podczas prezentacji rozwiązania nie ma potrzeby się tłumaczyć z tego, dlaczego akurat takie liczby bierzemy. Poniżej stosowne wyjaśnienie.

Ponieważ naszym celem jest nierówność postaci

$$???\,x^8\leqslant x^9+64,$$

w nierówności między średnimi trzeba wziąć liczby x^9 i 64, bo takie składniki występują po prawej (większej) stronie dowodzonej nierówności, gdzie oczekujemy jakiejś średniej arytmetycznej. Aby średnia geometryczna (lewa strona, mniejsza) dała x^8 (ewentualnie z jakimś współczynnikiem), liczbę x^9 trzeba wziąć ośmiokrotnie. Aby jednak po prawej stronie wyszła dokładnie taka suma, jaką mamy w dowodzonej nierowności, każde z ośmiu wystąpień x^9 trzeba wziąć ze współczynnikiem $1/8$. To prowadzi do dziewiątki liczb: osiem liczb $x^9/8$ i jedna liczba 64.

Jednak nierówność między średnimi praktycznie się nie zmienia przy przeskalowaniu liczb (czyli przemnożeniu przez tę samą stałą), do których ją stosujemy. Wobec tego dla elegancji przemnażamy dziewiątkę liczb przez 8 otrzymując osiem liczb x^9 i jedną liczbę $512=2^9$.

Sposób II (standardowy):
Oznaczając

$$g(x) = \frac{9x^8}{x^9+64}$$

stwierdzamy, że

$$g'(x) = \frac{72x^7\cdot(x^9+64)-81x^{16}}{(x^9+64)^2} = \frac{-9x^{16}+72\cdot 64\cdot x^7}{(x^9+64)^2} = \frac{9x^7\cdot(512-x^9)}{(x^9+64)^2}\,.$$

Stąd wynika, że $g'(2)=0$, a ponadto $g'(x)>0$, gdy $x\in(0,\,2)$ oraz $g'(x)<0$, gdy $x>2$.

Wobec tego funkcja g jest dodatnia i rosnąca na przedziale $(0,\,2]$ oraz dodatnia i malejąca na przedziale $[2,\,\infty)$. W konsekwencji przyjmuje ona w punkcie 2 wartość największą. Ponieważ $g(2)=4$, nierówność (♠) jest udowodniona.

Sposób III (brutalny, niepraktyczny bez wspomagania komputerowego):
Dowodzoną nierówność (♠) możemy przepisać w postaci

$$4x^9-9x^8+256\geqslant 0\,,$$

co po rozłożeniu na czynniki[2] lewej strony daje równoważną nierówność

$$(x-2)^2\cdot\left(4x^7+7x^6+12x^5+20x^4+32x^3+48x^2+64x+64\right)\geqslant 0\,.$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa, gdyż obydwa czynniki po lewej stronie są nieujemne dla nieujemnych x.

[2] Trzeba zauważyć, że dla $x=2$ zachodzi równość, co pozwala wykryć czynnik $x-2$.

Zadanie **17.** **(20 punktów** - zero punktów za rozważania, które nie prowadzą do rozwiązania)

Niech $f(x)=g(g(g(\dots g(g(x))\dots)))$ będzie złożeniem 10 egzemplarzy funkcji g zdefiniowanej wzorem $g(x)=\sqrt[4]{x^2+1}$. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{1000}\,.$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|g(x)-g(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{2}\,. \qquad (***)$$

W tym celu skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\,,$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}\,.$$

Przyjmując $a=\sqrt[4]{x^2+1}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^2+1}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|g(x)-g(y)|=\left|\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt[4]{y^2+1}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x^2+1)-(y^2+1)}{\left(\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt[4]{y^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt[4]{y^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt[4]{y^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right)}\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}<1\,.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt[4]{y^2+1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{0+1}+\sqrt[4]{0+1}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\,.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt[4]{y^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt[4]{y^2+1}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{|x-y|}{2}\,.$$

Dowód nierówności $(***)$ jest zakończony.

Niech teraz f_n będzie złożeniem n egzamplarzy funkcji g. Wówczas dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f_1(x)-f_1(y)|=|g(x)-g(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{2},$$

a ponadto z nierówności $(***)$ oraz z nierówności

$$|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{2^n}$$

wynika nierówność

$$|f_{n+1}(x)-f_{n+1}(y)|=|g(f_n(x))-g(f_n(y))|\leqslant\frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{2}\leqslant\frac{|x-y|}{2^{n+1}},$$

co stanowi szkic dowodu indukcyjnego[3] nierówności

$$|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{2^n}.$$

Ponieważ $f=f_{10}$, otrzymujemy nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{2^{10}}=\frac{|x-y|}{1024}\leqslant\frac{|x-y|}{1000}.$$

Uwaga: Na niepowodzenie skazane są próby rozwiązania przez wyprowadzenie wzoru na $f(x)$. Mamy bowiem:

$$f(x)=\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^2+1}+1}+1}+1}+1}+1}+1}+1}+1}+1}$$

lub czytelniej

$$f(x)=\sqrt[4]{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}}}}}}}}.$$

Uwaga 2: Nierówność $(***)$ można udowodnić także korzystając z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej – wówczas zamiast 2 w mianowniku możemy otrzymać $\sqrt{2}\cdot 3^{3/4}>3.22$, a w treści zadania[4] 100 000 zamiast 1000.

Uwaga 3: Dla funkcji f_2 możemy otrzymać w mianowniku liczbę $\left(\sqrt{2}\cdot 3^{3/4}\right)^2=6\sqrt{3}\approx 10.3923$, podczas gdy najlepsza stała to w przybliżeniu 10.4086.

[3] Można nie mówić o formalnej indukcji, tylko uzasadnić to ciągiem nierówności z kropeczkami.

[4] 100 000 to okrągła liczba uzyskana ręcznym szacowaniem. Z kalkulatorem dostajemy

$$121\,215=\left[\left(\sqrt{2}\cdot 3^{3/4}\right)^{10}\right],$$

jeśli zależy nam na liczbie całkowitej w mianowniku.