Zadania do wybiórczego omówienia[1] na ćwiczeniach w czwartek 13.06.2024.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami !!!

Zadania powtórzeniowe.

1188. Funkcje $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorami
$$f(x)=e^{x^9} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=e^{x^7}\,.$$
Podaj wartość ilorazu pochodnych
$$\frac{f^{(63)}(0)}{g^{(63)}(0)}\,.$$

1189. Funkcje $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorami
$$f(x)=e^{x^{12}} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=e^{x^{10}}\,.$$
Podaj wartość ilorazu pochodnych
$$\frac{f^{(60)}(0)}{g^{(60)}(0)}\,.$$

1190. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=e^{x^2}\,.$$
Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

1191. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=e^{x^3}\,.$$
Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

1192. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{99n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\,.$$

1193. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{30n}\frac{1}{\sqrt{n^2+4kn}}\,.$$

1194. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{9n}\frac{n}{k^2}\,.$$

1195. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{11n}\frac{n^2}{k^3}\,.$$

[1] Osoby biorące udział w dodatkowym kolokwium 13.06.2024 rozwiązują zadania z tej listy samodzielnie. Osoby z grupy 1 nie biorące udziału w kolokwium powinny udać się na ćwiczenia do wybranej przez siebie grupy ćwiczeniowej.

1196. Dla podanej liczby b podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych a, że potęgowy szereg zespolony

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny dla $z=a+bi$.
Uwaga: Istotną częścią zadania jest określenie przynależności do przedziału jego końców.

a) $b=0$, $a\in$ .... **b)** $b=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$, $a\in$ ....

c) $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a\in$ .... **d)** $b=\frac{1}{2}$, $a\in$ ....

1197. Wiadomo, że dla funkcji różniczkowalnej $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, gdzie $0\leqslant a<b$, pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej

$$\{(x,f(x)):\ x\in[a,b]\}$$

wokół osi OY (krzywa jest w płaszczyźnie XY) jest równe

$$2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

Wyznaczyć pole powierzchni (fragmentu paraboloidy obrotowej)

$$\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2=z\leqslant 7\right\}\,.$$

Wskazówka: Dana w zadaniu powierzchnia obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z=x^2$, $0\leqslant x\leqslant ???$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ.

1198. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^3 15x\cdot\sqrt{x+1}\,dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

1199. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

1200. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int\frac{dx}{x^3-x^2}$.

1201. Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+8}+\frac{9}{n^3+27}+\ldots+\frac{k^2}{n^3+k^3}+\ldots+\frac{4n^2}{n^3+8n^3}\right).$$

1202. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{\sqrt{3}} x^3\cdot\operatorname{arctg} x\,dx$. Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\pi$, gdzie w liczbą wymierną.

1203. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3}+n^{3/2}}$.

1204. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx$.

1205. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8^n+n^{11}}}{\sqrt{4^n+n^{9999}}}.$$

1206. Funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma pochodną daną wzorem $f'(x)=|x|$. Ponadto wiadomo, że $f(-1)=-1$. Wyznaczyć $f(1)$.

1207. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

1208. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}n^p\cdot\sum_{k=1}^{55n}\sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{9n+k}}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

1209. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx.$$

1210. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int\limits_1^e x^2\cdot\ln x\,dx.$$

1211. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}.$$

1212. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=2 \qquad \text{dla} \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=x$ dla $x\in\{0,\,2,\,4\}$. Wyznaczyć $f(5)$.

1213. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int\limits_1^9 \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\,dx.$$

Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.

1214. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}n^p\cdot\left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n+3}+\sqrt[3]{n+4}+\ldots+\sqrt[3]{8n-2}+\sqrt[3]{8n-1}+\sqrt[3]{8n}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

1215. W każdym z zadań **1215.1-1215.5** podaj w postaci uproszczonej normę supremum funkcji f określonej podanym wzorem w podanej dziedzinie.

Przypomnienie: $\|f\|=\sup\{|f(x)|:\, x\in D_f\}$.

1215.1. $f(x)=x^2-5,\quad D_f=(-1,3),\quad \|f\|=$ ....

1215.2. $f(x)=x^3-15,\quad D_f=(-1,3),\quad \|f\|=$ ....

1215.3. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5},\quad D_f=\mathbb{R},\quad \|f\|=$ ....

1215.4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5},\quad D_f=\mathbb{R},\quad \|f\|=$ ....

1215.5. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+7},\quad D_f=\mathbb{R},\quad \|f\|=$ ....

1216. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2-4x+4}}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci niezawierającej „arctg”.

1217. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+4}\,.$$

Wskazówka: $n^4+4=(n^2-2n+2)\cdot(n^2+2n+2)$.

1218. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\frac{1}{81}-\frac{1}{100}+\frac{1}{121}-\frac{1}{144}+\frac{1}{169}-\dots$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\,.$$

1219. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(4n-3)\cdot(4n+1)}{(3n-2)\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}\,.$$

1220. Funkcja $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\int_1^x (\log_2 t-3)^{2017}\,dt\,.$$

Wyznaczyć punkt, w którym f osiąga najmniejszą wartość.

1221. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^5 \frac{dx}{x^2-4x+5},$$

a następnie doprowadzić wynik do postaci $w\pi$, gdzie w jest liczbą wymierną.

1222. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx.$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej.

1223. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^6 \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}.$$

Zapisać wynik w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

1224. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+50}.$$

1225. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

1226. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x}.$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

1227. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{\sqrt{3}}^\infty \frac{2x+1}{x^4+x^2}\,dx.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

1228. W każdym z zadań **1228.1-1228.20** podaj sumę szeregu (może być liczbą rzeczywistą albo jednym z symboli $+\infty$ i $-\infty$).

Niech $a_n = \frac{6}{n}$. Wówczas:

1228.1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ldots\ldots\ldots$ **1228.2.** $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = \ldots\ldots\ldots$

1228.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \ldots\ldots$ **1228.4.** $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = \ldots\ldots$

1228.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+3}) = \ldots$ **1228.6.** $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+2}) = \ldots$

1228.7. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+3}) = \ldots$ **1228.8.** $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2} - a_{n+3}) = \ldots$

1228.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) = \ldots\ldots$ **1228.10.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+2}^2\right) = \ldots\ldots$

1228.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+3}^2\right) = \ldots$ **1228.12.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2 - a_{n+2}^2\right) = \ldots$

1228.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2 - a_{n+3}^2\right) = \ldots$ **1228.14.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+2}^2 - a_{n+3}^2\right) = \ldots$

1228.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) = \ldots$ **1228.16.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}\right) = \ldots$

1228.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+3}}\right) = \ldots$ **1228.18.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+2}}\right) = \ldots$

1228.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+3}}\right) = \ldots$ **1228.20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+2}} - 2^{a_{n+3}}\right) = \ldots$

1229. W każdym z zadań **1229.1-1229.14** podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Niech $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6\,.$$

Wobec tego:

1229.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) =$ ....

1229.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+2}) =$ ....

1229.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) =$ ....

1229.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) =$ ....

1229.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) =$ ....

1229.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+2}^2\right) =$ ....

1229.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}\right) =$ ....

1229.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(4^{a_n} - 4^{a_{n+2}}\right) =$ ....

1229.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(9^{a_n} - 9^{a_{n+1}}\right) =$ ....

1229.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(9^{a_n} - 9^{a_{n+2}}\right) =$ ....

1229.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(16^{a_n} - 16^{a_{n+1}}\right) =$ ....

1229.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(16^{a_n} - 16^{a_{n+2}}\right) =$ ....

1229.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+1}}\right) =$ ....

1229.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+2}}\right) =$ ....

1230. Rozstrzygnąć, czy wartość całki

$$\int\limits_{160\,000}^{160\,001} 100\cdot \ln x-\sqrt{x}\,dx=798{,}292\,596\,921\,596\,397\ldots$$

jest mniejsza czy większa od

$$400\cdot \ln 20-400-\frac{1}{3200}=798{,}292\,596\,921\,596\,397\ldots$$

1231. Obliczyć sumę szergu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2}\,.$$

Wskazówka: Rozłożyć na ułamki proste.

1232. Obliczyć sumę szergu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(6n+1)^2}+\frac{1}{(6n+5)^2}\right)\,.$$

Wskazówka: Wykazać, że suma danego szeregu jest równa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n)^2}\,.$$

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj w **postaci uproszczonej** wartość całki oznaczonej.

1233. $\int\limits_{0}^{\sqrt{6}}\sqrt{6-x^2}\,dx=$ ....

1234. $\int\limits_{0}^{\sqrt{30}}\sqrt{30-x^2}\,dx=$ ....

1235. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{6-x^2}\,dx=$ ....

1236. $\int\limits_{0}^{\sqrt{15}}\sqrt{30-x^2}\,dx=$ ....

1237. $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx=$ ....

1238. $\int\limits_{0}^{\sqrt{5}}\sqrt{20-x^2}\,dx=$ ....

1239. $\int\limits_{0}^{\sqrt{7}}\sqrt{28-x^2}\,dx=$ ....

1240. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=$ ....

1241. $\int\limits_{0}^{\sqrt{15}}\sqrt{20-x^2}\,dx=$ ....

1242. $\int\limits_{0}^{\sqrt{21}}\sqrt{28-x^2}\,dx=$ ....

1243. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-1}^{0} x\cdot \sqrt[4]{x+1}\,dx$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

1244. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{1}^{4} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

1245. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{\left(x,\ \frac{x^{3/2}}{3}\right):\ x\in[0,\,5]\right\}.$$

1246. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których całka niewłaściwa

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx$$

jest zbieżna.

1247. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-3)\cdot(7n+4)}\,.$$

1248. Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n\cdot z^n}{(3n+2)^n}\,.$$

Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności.

1249. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}\,.$$

1250. Udowodnić nierówność

$$\sum_{n=1}^{10^{10}} \frac{1}{n} > \frac{1}{2}+10\cdot\ln 10\,.$$

Na wykładzie w piątek 14 czerwca 2024 będą omawiane niektóre zadania z kolokwiów z całego semestru. W miarę wolnego czasu odpowiem też na Państwa pytania.