

1177. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$$

sprowadzając wynik do postaci

$$\frac{a + b \cos x}{c + d \cos x},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy

$$z = \cos x + i \sin x.$$

Wówczas dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$z^n = \cos nx + i \sin nx$$

i w konsekwencji

$$\cos nx = \operatorname{Re} z^n.$$

Przekształcamy dany w zadaniu szereg, korzystając po drodze ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} z^n}{3^n} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = \operatorname{Re} \frac{3}{3 - z} = \\ &= \operatorname{Re} \frac{3}{3 - \cos x - i \sin x} = \operatorname{Re} \frac{3 \cdot (3 - \cos x + i \sin x)}{(3 - \cos x)^2 + \sin^2 x} = \frac{3 \cdot (3 - \cos x)}{9 - 6 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x} = \\ &= \frac{9 - 3 \cos x}{10 - 6 \cos x}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Suma szeregu danego w treści zadania jest równa $\frac{9 - 3 \cos x}{10 - 6 \cos x}$.