Najważniejsze definicje i twierdzenia związane z szeregami Fouriera.

Iloczyn skalarny w przestrzeni funkcji[1]:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx\,.$$

Iloczyn skalarny w języku bazy[2] ortogonalnej sinusów i cosinusów:
Jeżeli

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

oraz

$$g(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx)\,,$$

to

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx = 2\pi\cdot a_0\cdot c_0 + \pi\cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cdot c_n + b_n\cdot d_n)\,.$$

Równość Parsevala:

$$\langle f, f\rangle = \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = 2\pi\cdot a_0^2 + \pi\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Szereg Fouriera funkcji[3] f:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \tag{F}$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\cdot\langle f, 1\rangle = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\,, \tag{$F0$}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\langle f, \cos nx\rangle = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx \tag{FA}$$

oraz

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\langle f, \sin nx\rangle = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx\,. \tag{FB}$$

Przy założeniach, które są spełnione przez używane przez nas funkcje, szereg Fouriera (F) jest punktowo zbieżny do funkcji f.

---

[1] Nie precyzujemy dokładnie, jak regularne mają być funkcje. Na pewno muszą być okresowe o okresie 2π.

[2] To nie jest baza w sensie algebry liniowej, bo potrzebujemy przejścia granicznego do wysumowania szeregu.

[3] Okresowej o okresie 2π, w punktach nieciągłości mającej wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych.

Kolokwium nr 7: środa 5.06.2024, godz. 14:15–15:45, materiał zad. 683–1159.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 23.05.2024.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami !!!

Szeregi trygonometryczne.

1145. Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ okresowej o okresie 2π określonej wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x\in[0,\,\pi/2] \\ 0 & \text{dla} \quad x\in(\pi/2,\,2\pi) \end{cases}$$

Doprowadzić wzory na współczynniki szeregu Fouriera do postaci niezawierającej funkcji trygonometrycznych (czyli w ostatecznej postaci nie powinny występować w tych wzorach wyrażenia typu $\sin n\pi$ czy $\cos n\pi$).

1146. Niech

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{3^n}\,.$$

Zakładając pełną beztroskę w manipulowaniu szeregami funkcyjnymi, obliczyć wartość całki $\int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$.

1147. Obliczyć wartość sumy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}$. Wolno skorzystać z gotowych wartości calek:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}}\,dx=\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{\sqrt{2}}\,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{2}}\,dx=\frac{e^{4\pi\sqrt{2}}-1}{2\sqrt{2}}\,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}}\cos nx\,dx=\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{n^2+2}\,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}}\sin nx\,dx=\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{-n}{n^2+2}\,.$$

W miarę możliwości rozwiązać zadanie dwoma sposobami i porównać wyniki. Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A=e^{2\pi\sqrt{2}}-1 \qquad \text{oraz} \qquad B=e^{2\pi\sqrt{2}}+1\,.$$

Wskazówka: Wykorzystać szereg Fouriera funkcji $f(x)=e^{x\sqrt{2}}$ dla $x\in(0,2\pi)$. Powołać się na zbieżność tego szeregu w wybranym punkcie lub wykorzystać równość Parsevala.

1148. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{dla} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\,.$$

Obliczyć wartość sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \ldots$$

Wskazówka: Scałkować podany w zadaniu szereg trygonometryczny i wstawić $x = \pi/2$.

1149. W każdym z zadań **1149.1-1149.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{4^n}, \qquad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{5^n},$$

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n}, \qquad D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{10^n}.$$

1149.1. $\int_0^{2\pi} A(x)^2\,dx =$ ....

1149.2. $\int_0^{2\pi} B(x)^2\,dx =$ ....

1149.3. $\int_0^{2\pi} C(x)^2\,dx =$ ....

1149.4. $\int_0^{2\pi} D(x)^2\,dx =$ ....

1149.5. $\int_0^{2\pi} A(x)B(x)\,dx =$ ....

1149.6. $\int_0^{2\pi} A(x)C(x)\,dx =$ ....

1149.7. $\int_0^{2\pi} A(x)D(x)\,dx =$ ....

1149.8. $\int_0^{2\pi} B(x)C(x)\,dx =$ ....

1149.9. $\int_0^{2\pi} B(x)D(x)\,dx =$ ....

1149.10. $\int_0^{2\pi} C(x)D(x)\,dx =$ ....

1150. W każdym z zadań **1150.1-1150.21** podaj w postaci uproszczonej wartość całki (jako liczbę wymierną lub jako iloczyn liczby wymiernej i liczby π).

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n},\qquad B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{3^n},\qquad C(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{3^n},$$

$$D(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3nx}{10^n},\qquad E(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(3n+1)x}{10^n},\qquad F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(3n+2)x}{10^n}.$$

1150.1. $\int\limits_0^{2\pi} A(x)^2\,dx=$ .... **1150.2.** $\int\limits_0^{2\pi} B(x)^2\,dx=$ ....

1150.3. $\int\limits_0^{2\pi} C(x)^2\,dx=$ .... **1150.4.** $\int\limits_0^{2\pi} D(x)^2\,dx=$ ....

1150.5. $\int\limits_0^{2\pi} E(x)^2\,dx=$ .... **1150.6.** $\int\limits_0^{2\pi} F(x)^2\,dx=$ ....

1150.7. $\int\limits_0^{2\pi} A(x)B(x)\,dx=$ .... **1150.8.** $\int\limits_0^{2\pi} A(x)C(x)\,dx=$ ....

1150.9. $\int\limits_0^{2\pi} A(x)D(x)\,dx=$ .... **1150.10.** $\int\limits_0^{2\pi} A(x)E(x)\,dx=$ ....

1150.11. $\int\limits_0^{2\pi} A(x)F(x)\,dx=$ .... **1150.12.** $\int\limits_0^{2\pi} B(x)C(x)\,dx=$ ....

1150.13. $\int\limits_0^{2\pi} B(x)D(x)\,dx=$ .... **1150.14.** $\int\limits_0^{2\pi} B(x)E(x)\,dx=$ ....

1150.15. $\int\limits_0^{2\pi} B(x)F(x)\,dx=$ .... **1150.16.** $\int\limits_0^{2\pi} C(x)D(x)\,dx=$ ....

1150.17. $\int\limits_0^{2\pi} C(x)E(x)\,dx=$ .... **1150.18.** $\int\limits_0^{2\pi} C(x)F(x)\,dx=$ ....

1150.19. $\int\limits_0^{2\pi} D(x)E(x)\,dx=$ .... **1150.20.** $\int\limits_0^{2\pi} D(x)F(x)\,dx=$ ....

1150.21. $\int\limits_0^{2\pi} E(x)F(x)\,dx=$ ....

1151. W każdym z zadań **1151.1-1151.16** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

Wskazówka: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{p^n} = \frac{p \cdot \sin x}{p^2+1-2p\cdot\cos x}$ dla $p>1$.

1151.1. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{5-4\cos x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **1151.2.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{5-3\cos x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1151.3. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x\cdot\sin 2x\,dx}{5-4\cos x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ **1151.4.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x\cdot\sin 2x\,dx}{5-3\cos x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1151.5. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x\cdot\sin 3x\,dx}{5-4\cos x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ **1151.6.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x\cdot\sin 3x\,dx}{5-3\cos x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1151.7. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{13-5\cos x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **1151.8.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{17-8\cos x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1151.9. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{(5-4\cos x)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ **1151.10.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{(5-3\cos x)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1151.11. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{(13-5\cos x)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ **1151.12.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{(17-8\cos x)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1151.13. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{(5-4\cos x)\cdot(5-3\cos x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1151.14. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{(13-5\cos x)\cdot(17-8\cos x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1151.15. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{(5-4\cos x)\cdot(13-5\cos x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1151.16. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{(5-3\cos x)\cdot(13-5\cos x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

W kolejnych pięciu zadaniach zakładamy, że funkcja f jest na tyle regularna, że nie ma problemu z obliczeniem współczynników jej szeregu Fouriera, a przy tym f jest sumą swojego szeregu Fouriera.

1152. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie π, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n nieparzystych.

1153. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $\frac{\pi}{2}$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 4.

1154. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $2\pi/3$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 3.

1155. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $2\pi/5$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 5.

1156. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ okresowa o okresie 2π. Dowieść, że f spełnia dla każdego $x\in\mathbb{R}$ równość

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy ....
<<< podać warunek w języku współczynników szeregu Fouriera funkcji f >>>

1157. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

stosując wzór Parsevala do

$$f(x) = e^x$$

na $(0,2\pi)$ oraz wstawiając $x=0$ do szeregu Fouriera tej funkcji. Porównać obydwa wyniki.

1158. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-2}$$

wstawiając $x=0$ do szeregu Fouriera funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \cos(x\sqrt{2})$$

na $(0,2\pi)$.

1159. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

używając

$$f(x) = x(\pi - |x|)$$

na $(-\pi,\pi)$.