

1138. W każdym z zadań **1138.1-1138.25** podaj normę supremum funkcji f o podanym wzorze i dziedzinie.

1138.1. $f(x) = 7 \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 7$

1138.2. $f(x) = 7 \sin x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 10$

1138.3. $f(x) = 7 \sin^2 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 4$

1138.4. $f(x) = 7 \sin^3 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 10$

1138.5. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = (\frac{1}{8}, 8)$, $\|f\| = 5$

1138.6. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = (2, 32)$, $\|f\| = 3$

1138.7. $f(x) = (\log_2 x)^2 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| = 6$

1138.8. $f(x) = (\log_2 x)^3 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| = 33$

1138.9. $f(x) = (\log_2 x)^4 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| = 75$

1138.10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = 3/2$

1138.11. $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = 4$

1138.12. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = 7/3$

1138.13. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 26x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = 26/3$

1138.14. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 15x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = 15/4$

1138.15. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 80x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = 20$

1138.16. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 10x + 29}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 1/4$

1138.17. $f(x) = \frac{1}{x^4 + 10x^2 + 31}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 1/31$

1138.18. $f(x) = \frac{1}{x^8 - 10x^4 + 33}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 1/8$

1138.19. $f(x) = \frac{1}{x^{12} + 10x^6 + 37}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 1/37$

1138.20. $f(x) = \frac{1}{x^{14} + 10x^7 + 39}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 1/14$

1138.21. $f(x) = 2^x - 7, \quad D_f = (2, 3), \quad \|f\| = 3$

1138.22. $f(x) = (2^x - 7)^2 - 7, \quad D_f = (2, 3), \quad \|f\| = 7$

1138.23. $f(x) = (2^x - 7)^2 - 17, \quad D_f = (2, 3), \quad \|f\| = 17$

1138.24. $f(x) = (2^x - 7)^3 + 7, \quad D_f = (2, 3), \quad \|f\| = 20$

1138.25. $f(x) = (2^x - 7)^3 + 17, \quad D_f = (2, 3), \quad \|f\| = 18$

1139. Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$f(x) = \frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11}.$$

Rozwiązanie:

Oszacujemy wyrażenie definiujące funkcję f rozważając dwa przypadki:

1° Gdy $|x| < 1$, otrzymujemy:

$$\frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11} \leq \frac{6 - 0 + 7}{0 - 1 + 11} = \frac{13}{10}.$$

2° Gdy $|x| \geq 1$, otrzymujemy:

$$\frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11} \leq \frac{6x^6 - 0 + 7x^6}{8x^8 - x^8 + 0} = \frac{13}{7x^2} \leq \frac{13}{7}.$$

Wobec tego dla każdej liczby rzeczywistej x mamy

$$|f(x)| = f(x) \leq \frac{13}{7},$$

skąd wynika nierówność $\|f\| \leq 13/7$.

1140. Dany jest szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F , gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\sin 2^n x}{333^n}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k \leq m$ zachodzi równość $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że $m = 8$.

Dla liczb całkowitych nieujemnych $k \leq 8$ otrzymujemy

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{2^{kn} \cdot \text{jakiśsinus } 2^n x}{333^n},$$

gdzie $f^{(0)} = f$, a "jakiśsinus" oznacza jedną z funkcji $\pm \sin$, $\pm \cos$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{kn}}{333^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^k}{333}\right)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{256}{333}\right)^n < +\infty,$$

skąd wynika jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$, a w konsekwencji możliwość 8-krotnego różniczkowania danego w zadaniu szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem.

Ponadto

$$f_n^{(9)}(x) = \frac{2^{9n} \cos 2^n x}{333^n} = \left(\frac{512}{333}\right)^n \cdot \cos 2^n x,$$

co dla $x=0$ daje szereg rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{512}{333}\right)^n$. Zatem szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(9)}$ nie jest zbieżny (nawet punktowo), co dowodzi, że liczba $m=9$ nie spełnia warunków zadania.

W rozwiązaniu wykorzystaliśmy zbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie $256/333$ bezwzględnie mniejszym od 1 i rozbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie $512/333$ większym od 1.

1141. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n^3 \cdot x)}{n^{20}}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Rozwiązanie:

Najpierw zauważmy, że

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{n^{3k} \cdot \text{jsin}(n^3 \cdot x)}{n^{20}} = \frac{\text{jsin}(n^3 \cdot x)}{n^{20-3k}},$$

gdzie jsin jest jedną z funkcji $\pm \sin$ lub $\pm \cos$. Zatem

$$\|f_n^{(k)}\| = \frac{1}{n^{20-3k}} = n^{3k-20}.$$

Jeżeli szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\|$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Ponieważ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{20-3k}},$$

szereg ten jest zbieżny, o ile $20-3k > 1$, czyli dla $k \leq 6$.

W szczególności szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(6)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Jeżeli $\|f_n^{(k)}\| \not\rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ nie jest jednostajnie zbieżny. Taką sytuację mamy np. dla $k = 7$, gdzie

$$\|f_n^{(7)}\| = n \rightarrow \infty.$$

Wobec tego szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(7)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k = 6$.

1142. Dany jest szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F , gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\cos n^8 x}{n^{60}}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k \leq m$ zachodzi równość $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że $m = 7$.

Dla liczb całkowitych nieujemnych $k \leq 7$ otrzymujemy

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{\text{jakiśsinus } n^8 x}{n^{60-8k}},$$

gdzie $f^{(0)} = f$, a "jakiśsinus" oznacza jedną z funkcji $\pm \sin$, $\pm \cos$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{60-8k}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{60-8 \cdot 7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty,$$

skąd wynika jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$, a w konsekwencji możliwość 7-krotnego różniczkowania danego w zadaniu szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem.

Ponadto

$$f_n^{(8)}(x) = n^4 \cos n^8 x,$$

co dla $x = 0$ daje szereg rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} n^4$. Zatem szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(8)}$ nie jest zbieżny (nawet punktowo), co dowodzi, że liczba $m = 8$ nie spełnia warunków zadania.

1143. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{\binom{2n}{n}^k \cdot j \sin\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4},$$

gdzie $j \sin$ jest jedną z funkcji $\pm \sin$ lub $\pm \cos$. Stąd

$$\|f_n^{(k)}\| = \frac{\binom{2n}{n}^k}{\binom{3n}{n}^4}. \quad (1)$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}^k}{\binom{3n}{n}^4} \quad (2)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{\binom{2n+2}{n+1}^k \cdot \binom{3n}{n}^4}{\binom{3n+3}{n+1}^4 \cdot \binom{2n}{n}^k} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}^k}{\binom{2n}{n}^k} \cdot \frac{\binom{3n}{n}^4}{\binom{3n+3}{n+1}^4} = \\ & = \left(\frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1)^2} \right)^k \cdot \left(\frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n+1)}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \right)^4 \rightarrow \frac{4^k \cdot 4^4}{27^4} = \frac{2^{2k+8}}{3^{12}} = \left(\frac{2^{k+4}}{3^6} \right)^2 = g. \end{aligned}$$

Ponieważ $3^6 = 729$, zachodzą nierówności $2^9 < 3^6 < 2^{10}$. Zatem dla $k = 5$ otrzymujemy $g < 1$. Wobec tego na mocy kryterium d'Alemberta szereg liczbowy (2) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(5)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Odnosząc powyższe kryterium d'Alemberta do ciągu (1) otrzymujemy $g > 1$ dla $k = 6$, skąd wynika, że ciąg liczbowy (1) jest rozbieżny do $+\infty$. W szczególności

$$\|f_n^{(6)}\| \not\rightarrow 0,$$

a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(6)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k = 5$.

1144. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n! \cdot x)}{(3n)!}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

*Rozwiązanie:*Niech $k = 3$. Wówczas

$$f_n^{(k)}(x) = f_n'''(x) = \frac{(n!)^3 \cdot \sin(n! \cdot x)}{(3n)!},$$

skąd

$$\|f_n'''\| = \frac{(n!)^3}{(3n)!}.$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'''\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (3)$$

otrzymujemy

$$\frac{((n+1)!)^3 \cdot (3n)!}{(3n+3)! \cdot (n!)^3} = \frac{(n+1)^3}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \rightarrow \frac{1}{27} < 1.$$

Zatem szereg liczbowy (3) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'''$ jest jednostajnie zbieżny.

Ponadto

$$f_n^{(k+1)}(x) = f_n^{(4)}(x) = \frac{(n!)^4 \cdot \cos(n! \cdot x)}{(3n)!},$$

skąd

$$\|f_n^{(4)}\| = \frac{(n!)^4}{(3n)!}. \quad (4)$$

Stosując kryterium d'Alemberta do ciągu (4) otrzymujemy

$$\frac{((n+1)!)^4 \cdot (3n)!}{(3n+3)! \cdot (n!)^4} = \frac{(n+1)^4}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \rightarrow +\infty > 1.$$

Zatem ciąg liczbowy (4) jest rozbieżny do $+\infty$, skąd w szczególności

$$\|f_n^{(4)}\| \not\rightarrow 0,$$

a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Inne wnioskowanie: Z kryterium d'Alemberta jak wyżej, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(3n)!}$ jest rozbieżny, więc $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}$ nie jest nawet punktowo zbieżny, a co dopiero jednostajnie.