

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 16.05.2024.**Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami !!!****Ciągi i szeregi funkcyjne.****Podsumowanie najważniejszych wiadomości
o normie supremum i zbieżności jednostajnej:**Normą supremum funkcji f nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f} |f(x)|.$$

Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:Ciąg funkcji (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do funkcji f określonej na tej samej dziedzinie, co zapisujemy jako $f_n \rightrightarrows f$, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , to f jest funkcją ciągłą.Jeżeli ciąg (f_n) funkcji mających ciągłe pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , a ciąg pochodnych (f'_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g , to funkcja f jest różniczkowalna i przy tym $f' = g$.Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k.$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie.Jeżeli $\|f_n\| \not\rightarrow 0$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nie jest zbieżny jednostajnie.Jeżeli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągłą.Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mają ciągłe pochodne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n.$$

Analogicznie w przypadku pochodnych wyższych rzędów.

Obliczyć normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

$$1116. f(x) = \frac{1}{x^2+3}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$1117. f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$1118. f(x) = x^2, \quad D_f = (-1, 2)$$

$$1119. f(x) = x^3, \quad D_f = (-4, 3)$$

$$1120. f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$1121. f(x) = \operatorname{arctg} \sin x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$1122. f(x) = \sin x + \cos x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$1123. f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$1124. f(x) = x^3 - x, \quad D_f = (-1, 1)$$

$$1125. f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^2+t}, \quad D_f = (1, +\infty)$$

Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie¹.

$$1126. f(x) = \frac{7x^4 + 11x^2 + 13}{2x^4 + 3x^2 + 5}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$1127. f(x) = \frac{11x^4 - 7x^2 + 13}{3x^4 - 2x^2 + 5}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$1128. f(x) = \frac{2^x + 5^x + 8^x}{2^x + 4^x + 8^x}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$1129. f(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^4+1}, \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$1130. f(x) = \int_0^x \frac{\sin t \, dt}{t^2+1}, \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$1131. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^3 x^4}{n^2+n}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

1132. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągłą.

1133. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3+8}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

¹**Wskazówka do niektórych zadań:**

Oszacuj podane wyrażenie osobno w przypadkach $|x| < 1$ i $|x| \geq 1$

1134. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{\binom{3n}{n}^2}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją pięciokrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu piątego włącznie.

1135. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

1136. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin nx + \cos n^2 x}{n^8 + 88}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją trzykrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie.

1137. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^{2020} x}{2^n}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

1138. W każdym z zadań **1138.1-1138.25** podaj normę supremum funkcji f o podanym wzorze i dziedzinie.

1138.1. $f(x) = 7 \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.2. $f(x) = 7 \sin x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.3. $f(x) = 7 \sin^2 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.4. $f(x) = 7 \sin^3 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.5. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = (\frac{1}{8}, 8)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.6. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = (2, 32)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.7. $f(x) = (\log_2 x)^2 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.8. $f(x) = (\log_2 x)^3 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.9. $f(x) = (\log_2 x)^4 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.11. $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.12. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.13. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 26x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.14. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 15x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.15. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 80x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.16. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 10x + 29}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.17. $f(x) = \frac{1}{x^4 + 10x^2 + 31}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.18. $f(x) = \frac{1}{x^8 - 10x^4 + 33}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.19. $f(x) = \frac{1}{x^{12} + 10x^6 + 37}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.20. $f(x) = \frac{1}{x^{14} + 10x^7 + 39}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.21. $f(x) = 2^x - 7$, $D_f = (2, 3)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.22. $f(x) = (2^x - 7)^2 - 7$, $D_f = (2, 3)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.23. $f(x) = (2^x - 7)^2 - 17$, $D_f = (2, 3)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.24. $f(x) = (2^x - 7)^3 + 7$, $D_f = (2, 3)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1138.25. $f(x) = (2^x - 7)^3 + 17$, $D_f = (2, 3)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

1139. Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$f(x) = \frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11}.$$

1140. Dany jest szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F , gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\sin 2^n x}{333^n}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k \leq m$ zachodzi równość $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

1141. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n^3 \cdot x)}{n^{20}}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

1142. Dany jest szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F , gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\cos n^8 x}{n^{60}}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k \leq m$ zachodzi równość $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

1143. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

1144. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n! \cdot x)}{(3n)!}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.