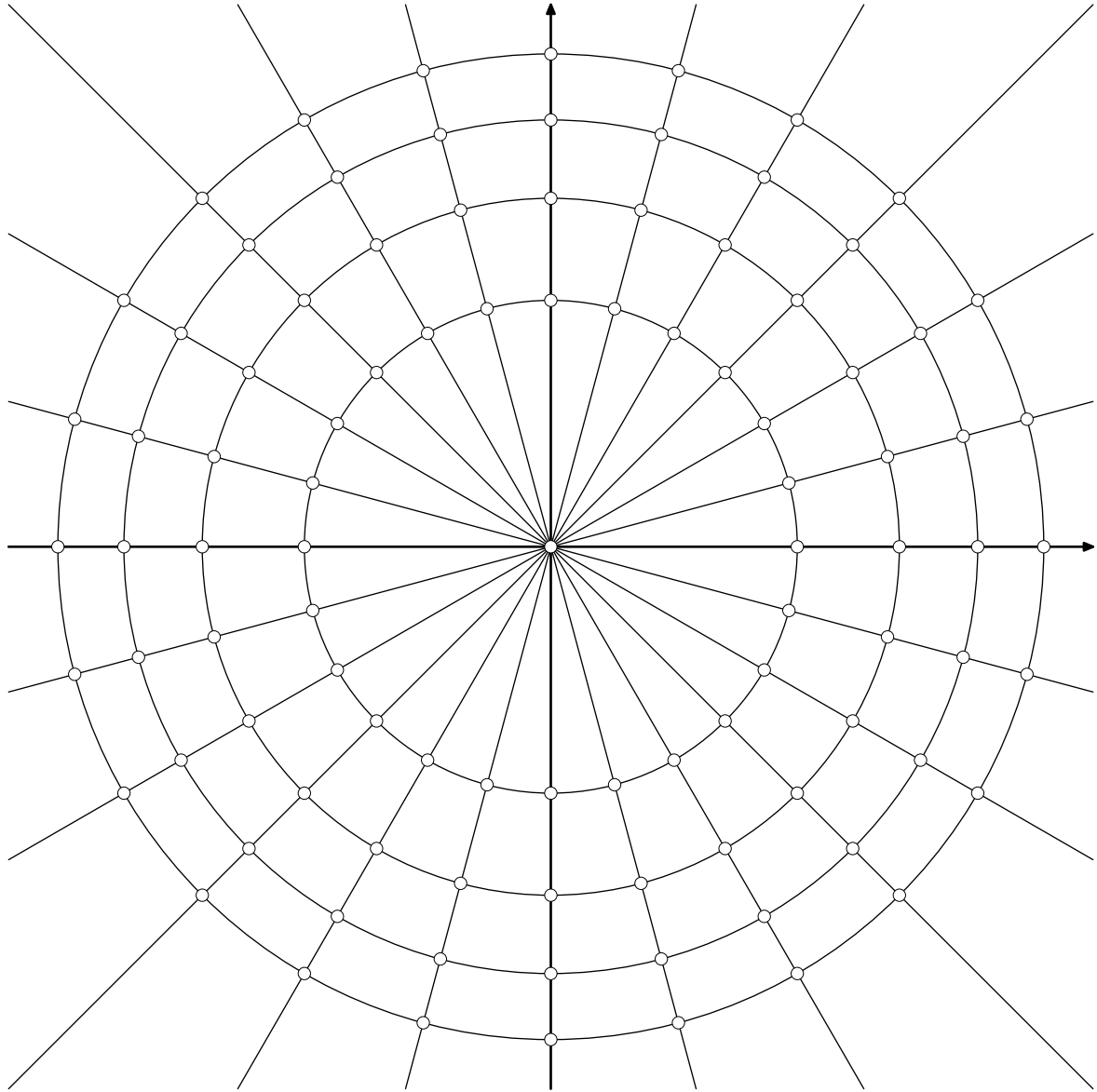


1099. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^4 = -4$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach \sqrt{n} dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .

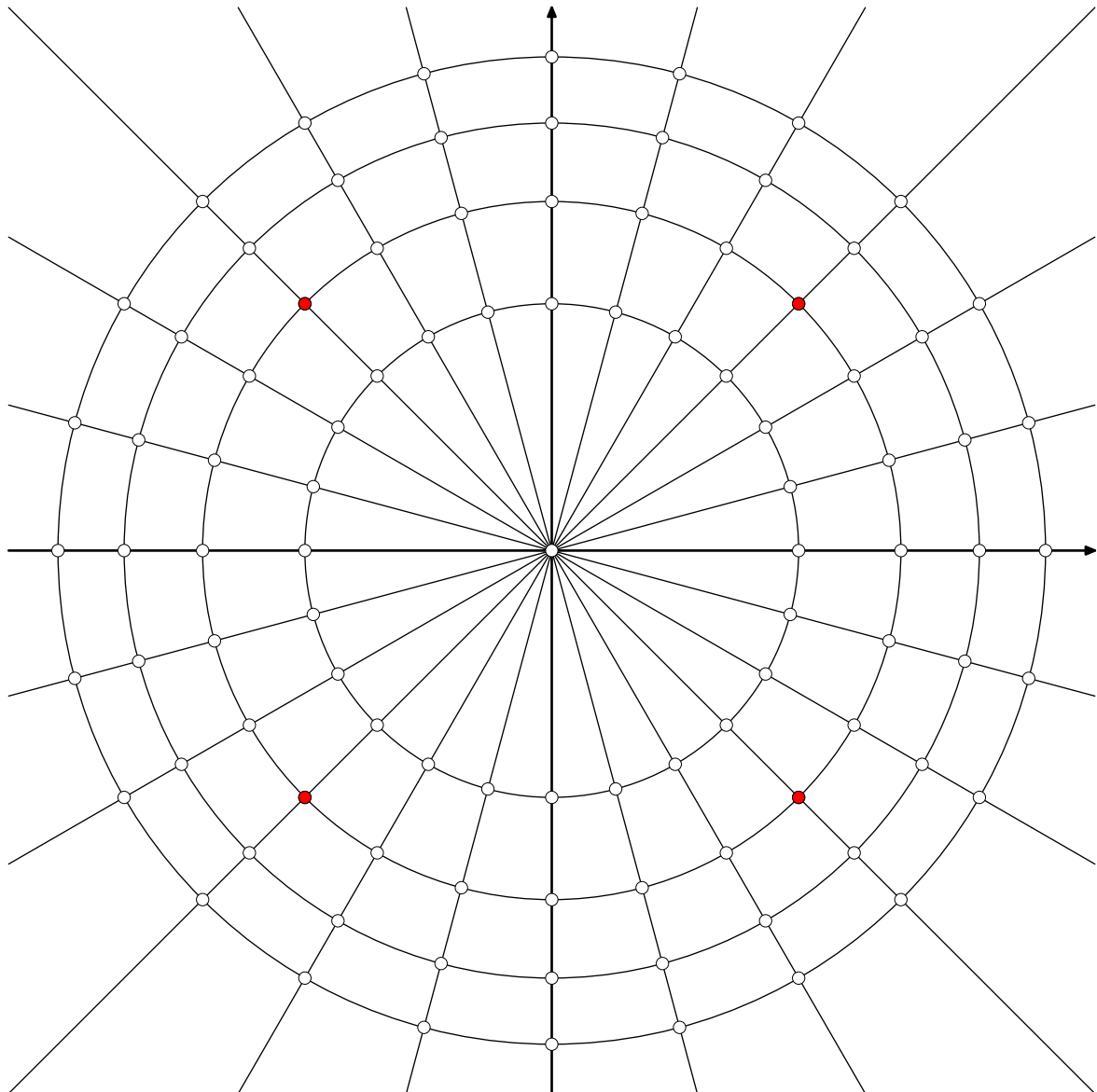


Rozwiązanie:

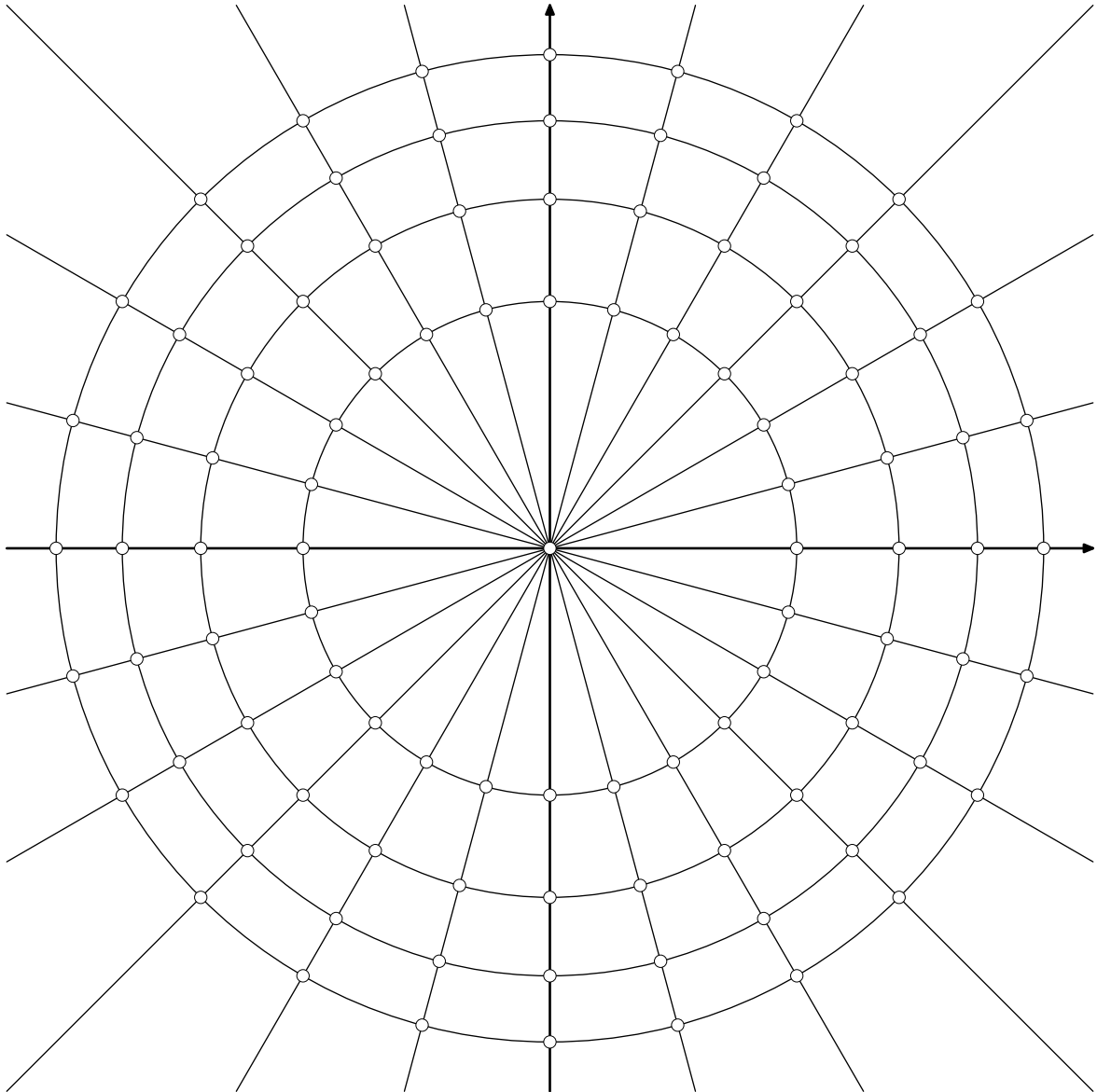
Liczba zespolona -4 ma moduł 4 i argument π , w związku z czym jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$, a jeden z nich ma argument $\pi/4$. Tym pierwiastkiem jest więc $\sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}) = 1 + i$. Pozostałe trzy rozwiązania danego w zadaniu równania leżą na okręgu o promieniu $\sqrt{2}$ co 90° .

Inaczej: liczba -4 ma moduł 4 i argument π , a zatem jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt{2}$ i argumenty $\pi/4 + k\pi/2$ dla $k = 0, 1, 2, 3$, czyli odpowiednio $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 4 rozwiązania: $\pm 1 \pm i$.



1100. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^9 = 27z^3$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach \sqrt{n} dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



Rozwiązanie:

Przepisujemy dane równanie w postaci

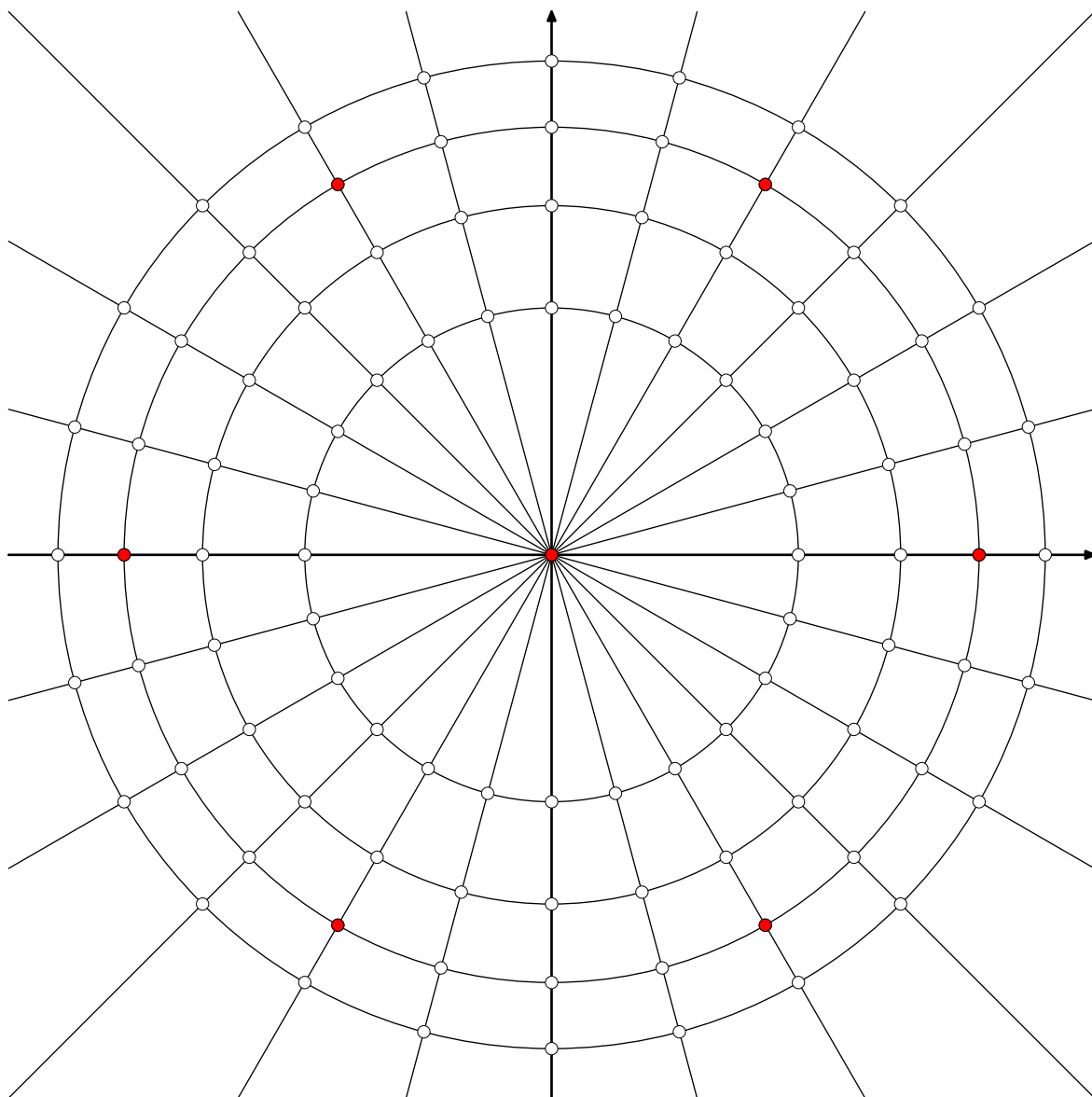
$$z^3 \cdot (z^6 - 27) = 0.$$

Powyższe równanie jest spełnione przez $z = 0$ oraz przez takie liczby zespolone z , że $z^6 = 27$.

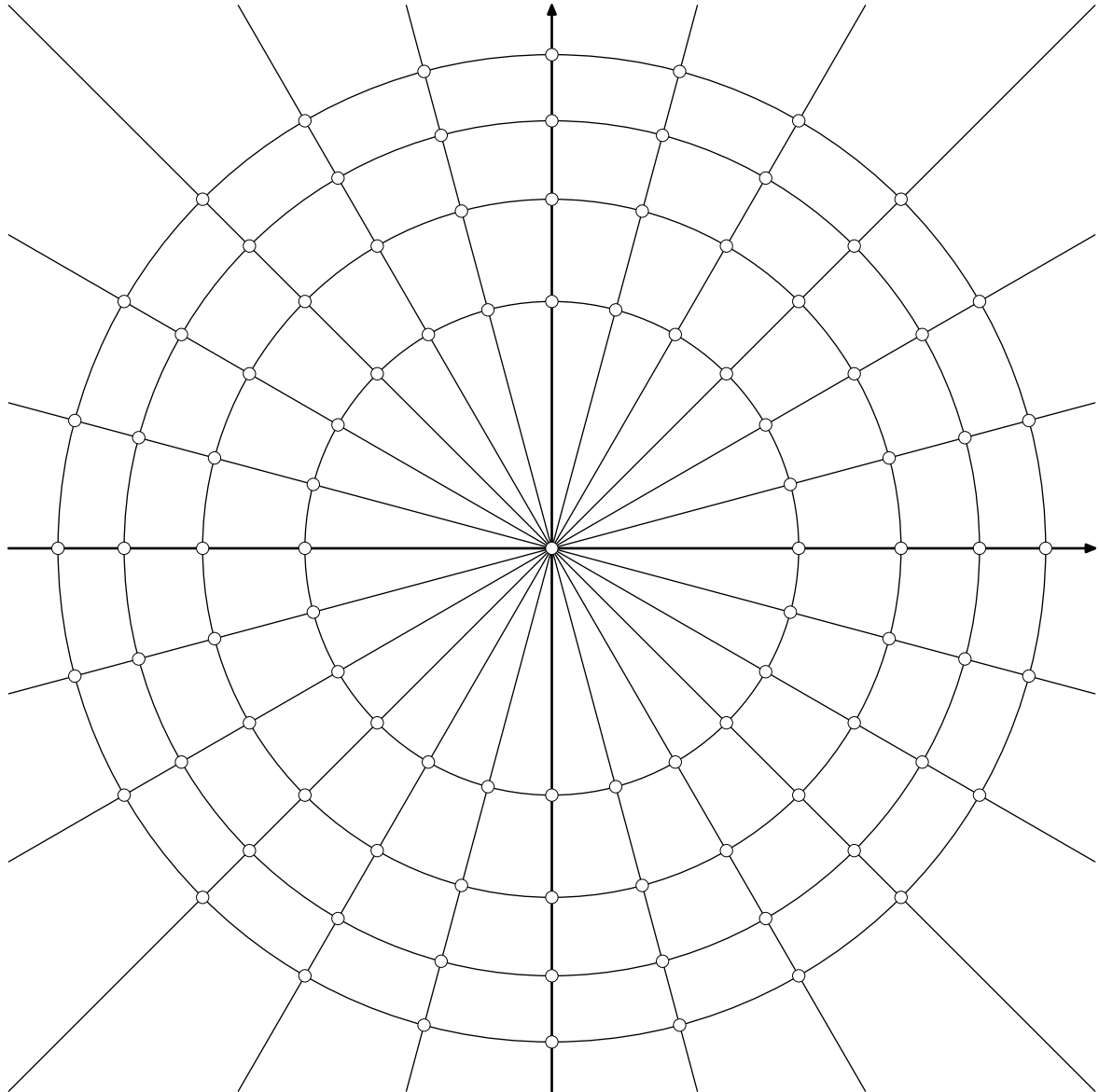
Zauważmy, że jednym z rozwiązań równania $z^6 = 27$ jest $z = \sqrt{3}$, a pozostałe pięć rozwiązań tego równania leży na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$ co 60° .

Inaczej: liczba 27 ma moduł 27 i argument 0, a zatem jej pierwiastki szóstego stopnia mają moduł $\sqrt{3}$ i argumenty $2k\pi/6$ dla $k=0,1,2,3,4,5$, czyli odpowiednio $0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 7 rozwiązań: $0, \pm\sqrt{3}$ oraz $\pm_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \pm_2 \frac{3i}{2}$.



1101. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^7 + 4z^3 = 8z^4 + 32$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach \sqrt{n} dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



Rozwiązanie:

Przepisujemy dane równanie w postaci

$$z^3 \cdot (z^4 + 4) = 8 \cdot (z^4 + 4),$$

czyli

$$(z^3 - 8) \cdot (z^4 + 4) = 0.$$

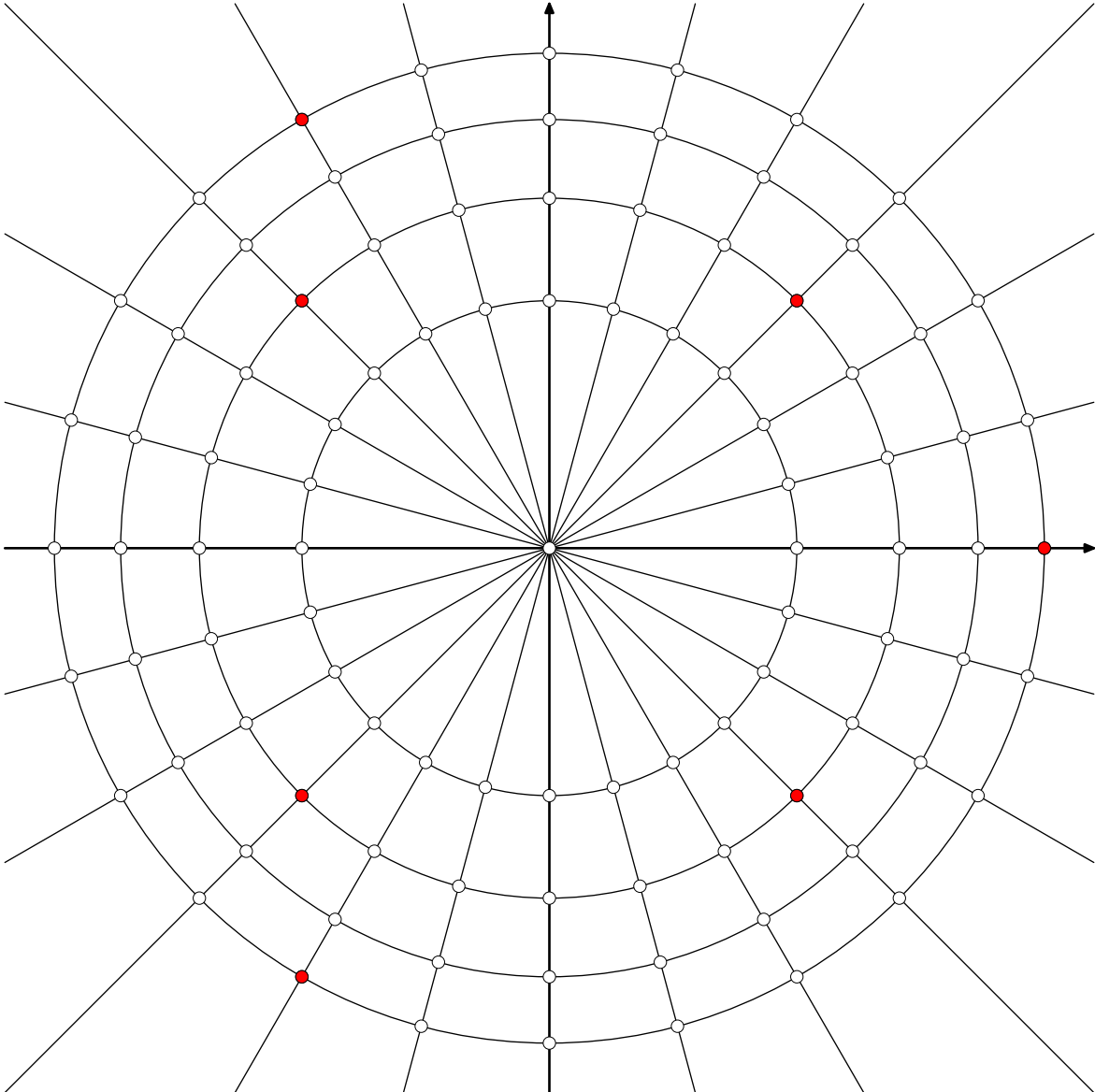
Rozwiązując równanie $z^4 + 4 = 0$, czyli $z^4 = -4$, stwierdzamy, że liczba zespolona -4 ma moduł 4 i argument π , w związku z czym jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$, a jeden z nich ma argument $\pi/4$. Tym pierwiastkiem jest więc $\sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}) = 1 + i$. Pozostałe trzy rozwiązania tego równania leżą na okręgu o promieniu $\sqrt{2}$ co 90° .

Inaczej: liczba -4 ma moduł 4 i argument π , a zatem jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt{2}$ i argumenty $\pi/4 + k\pi/2$ dla $k = 0, 1, 2, 3$, czyli odpowiednio $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$.

Z kolei rozwiązując równanie $z^3 - 8 = 0$, czyli $z^3 = 8$, zauważamy, że jego rozwiązaniem jest $z = 2$, a pozostałe dwa rozwiązania tego równania leżą na okręgu o promieniu 2 co 120° .

Inaczej: liczba 8 ma moduł 8 i argument 0, a zatem jej pierwiastki trzeciego stopnia mają moduł 2 i argumenty $2k\pi/3$ dla $k = 0, 1, 2$, czyli odpowiednio 0, $2\pi/3, 4\pi/3$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 7 rozwiązań: $\pm_1 1 \pm_2 i, 2$ oraz $-1 \pm \sqrt{3}i$.



1102. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^{\pi} \sin^7 x \, dx.$$

Przedstawić wynik w postaci ułamka nieskracalnego o dwucyfrowym liczniku i mianowniku.

Rozwiązanie:

Sposób I

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z = \cos x + i \sin x,$$

co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \sin nx = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sin^7 x &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^7 = \frac{z^7 - 7z^5 + 21z^3 - 35z + 35z^{-1} - 21z^{-3} + 7z^{-5} - z^{-7}}{-128i} = \\ &= -\frac{\sin 7x}{64} + \frac{7 \sin 5x}{64} - \frac{21 \sin 3x}{64} + \frac{35 \sin x}{64}. \end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^7 x \, dx &= \int_0^{\pi} -\frac{\sin 7x}{64} + \frac{7 \sin 5x}{64} - \frac{21 \sin 3x}{64} + \frac{35 \sin x}{64} \, dx = \\ &= \frac{\cos 7x}{7 \cdot 64} - \frac{7 \cos 5x}{5 \cdot 64} + \frac{21 \cos 3x}{3 \cdot 64} - \frac{35 \cos x}{64} \Bigg|_{x=0}^{\pi} = \frac{\cos 7x}{7 \cdot 64} - \frac{7 \cos 5x}{5 \cdot 64} + \frac{7 \cos 3x}{64} - \frac{35 \cos x}{64} \Bigg|_{x=0}^{\pi} = \\ &= \frac{\cos 7\pi}{7 \cdot 64} - \frac{7 \cos 5\pi}{5 \cdot 64} + \frac{7 \cos 3\pi}{64} - \frac{35 \cos \pi}{64} - \frac{\cos 0}{7 \cdot 64} + \frac{7 \cos 0}{5 \cdot 64} - \frac{7 \cos 0}{64} + \frac{35 \cos 0}{64} = \\ &= -\frac{1}{7 \cdot 64} + \frac{7}{5 \cdot 64} - \frac{7}{64} + \frac{35}{64} - \frac{1}{7 \cdot 64} + \frac{7}{5 \cdot 64} - \frac{7}{64} + \frac{35}{64} = \frac{1}{32} \cdot \left(-\frac{1}{7} + \frac{7}{5} - 7 + 35 \right) = \\ &= \frac{1}{32} \cdot \left(-\frac{1}{7} + \frac{7}{5} + 28 \right) = \frac{1}{32} \cdot \left(-\frac{1}{7} + \frac{7}{5} + 28 \right) = \frac{-5 + 49 + 980}{1120} = \frac{1024}{1120} = \frac{32}{35}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $32/35$.

Sposób II

Podstawienie $t = \cos x$ i formalnie $dt = -\sin x \, dx$ prowadzi do

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^7 x \, dx &= - \int_1^{-1} (1-t^2)^3 \, dt = \int_{-1}^1 -t^6 + 3t^4 - 3t^2 + 1 \, dt = 2 \cdot \int_0^1 -t^6 + 3t^4 - 3t^2 + 1 \, dt = \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{t^7}{7} + \frac{3t^5}{5} - t^3 + t \right) \Bigg|_{t=0}^1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{7} + \frac{3}{5} \right) = 2 \cdot \frac{-5 + 21}{35} = 2 \cdot \frac{16}{35} = \frac{32}{35}. \end{aligned}$$

1103. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi/6} \cos^6 x \, dx.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$. Wówczas

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \cos^6 x &= \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^6 = \frac{z^6 + 6z^4 + 15z^2 + 20 + 15z^{-2} + 6z^{-4} + z^{-6}}{64} = \\ &= \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3 \cos 4x}{16} + \frac{15 \cos 2x}{32} + \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/6} \cos^6 x \, dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3 \cos 4x}{16} + \frac{15 \cos 2x}{32} + \frac{5}{16} \, dx = \\ &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3 \cos 4x}{16} + \frac{15 \cos 2x}{32} \, dx + \int_0^{\pi/6} \frac{5}{16} \, dx = \frac{\sin 6x}{192} + \frac{3 \sin 4x}{64} + \frac{15 \sin 2x}{64} \Big|_{x=0}^{\pi/6} + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{5}{16} = \\ &= \frac{\sin \pi}{192} + \frac{3 \sin(2\pi/3)}{64} + \frac{15 \sin(\pi/3)}{64} + \frac{5\pi}{96} = \frac{0}{192} + \frac{3 \cdot (\sqrt{3}/2)}{64} + \frac{15 \cdot (\sqrt{3}/2)}{64} + \frac{5\pi}{96} = \\ &= \frac{18 \cdot (\sqrt{3}/2)}{64} + \frac{5\pi}{96} = \frac{9\sqrt{3}}{64} + \frac{5\pi}{96}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{5\pi}{96} + \frac{9\sqrt{3}}{64}$.

1104. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\pi} \sin^8 x \, dx.$$

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z = \cos x + i \sin x,$$

co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sin^8 x &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^8 = \frac{z^8 - 8z^6 + 28z^4 - 56z^2 + 70 - 56z^{-2} + 28z^{-4} - 8z^{-6} + z^{-8}}{256} = \\ &= \frac{\cos 8x}{128} - \frac{\cos 6x}{16} + \frac{7 \cos 4x}{32} - \frac{7 \cos 2x}{16} + \frac{35}{128}.\end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^\pi \sin^8 x \, dx = \int_0^\pi \frac{\cos 8x}{128} - \frac{\cos 6x}{16} + \frac{7 \cos 4x}{32} - \frac{7 \cos 2x}{16} + \frac{35}{128} \, dx = \frac{35\pi}{128}.$$

Odpowiedź

Dana całka ma wartość $35\pi/128$.

1105. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$, co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \quad \sin nx = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sin^2 x \cdot \cos^4 x &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^2 \cdot \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^4 = \frac{(z^2 - 2 + z^{-2}) \cdot (z^4 + 4z^2 + 6 + 4z^{-2} + z^{-4})}{-64} = \\ &= \frac{z^6 + 2z^4 - z^2 - 4 - z^{-2} + 2z^{-4} + z^{-6}}{-64} = -\frac{\cos 6x}{32} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 2x}{32} + \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Inna wersja najbardziej uciążliwego fragmentu powyższych rachunków:

$$\begin{aligned}\left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^2 \cdot \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^4 &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \cdot \frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2 = \left(\frac{z^2 - z^{-2}}{4i} \right)^2 \cdot \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{(z^4 - 2 + z^{-4}) \cdot (z^2 + 2 + z^{-2})}{-64} = \frac{z^6 + 2z^4 - z^2 - 4 - z^{-2} + 2z^{-4} + z^{-6}}{-64}.\end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int_0^{2\pi} -\frac{\cos 6x}{32} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 2x}{32} + \frac{1}{16} \, dx = \frac{\pi}{8}.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\pi/8$.

1106. Udowodnić nierówność

$$\int_0^{4\pi} \cos^{10} x \, dx < \pi.$$

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z = \cos x + i \sin x,$$

co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \cos^{10} x &= \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^{10} = \\ &= \frac{z^{10} + 10z^8 + 45z^6 + 120z^4 + 210z^2 + 252 + 210z^{-2} + 120z^{-4} + 45z^{-6} + 10z^{-8} + z^{-10}}{1024} = \\ &= \frac{\cos 10x}{512} + \frac{5 \cos 8x}{256} + \frac{45 \cos 6x}{512} + \frac{15 \cos 4x}{64} + \frac{105 \cos 2x}{256} + \frac{63}{256}. \end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{4\pi} \cos^{10} x \, dx = \int_0^{4\pi} \frac{\cos 10x}{512} + \frac{5 \cos 8x}{256} + \frac{45 \cos 6x}{512} + \frac{15 \cos 4x}{64} + \frac{105 \cos 2x}{256} + \frac{63}{256} \, dx = \frac{63\pi}{64} < \pi.$$

1107. Znaleźć taką funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$f''(x) = \cos^4 x \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

a ponadto $f(0) = f(\pi) = 0$. Obliczyć $f(2\pi)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$. Wówczas

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Zatem

$$\cos^4 x = \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^4 = \frac{z^4 + 4z^2 + 6 + 4z^{-2} + z^{-4}}{16} = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}.$$

W konsekwencji

$$f'(x) = \int \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8} \, dx = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} + C$$

oraz

$$f(x) = \int \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} + C dx = -\frac{\cos 4x}{128} - \frac{\cos 2x}{8} + \frac{3x^2}{16} + Cx + D.$$

Z warunku $f(0) = 0$ otrzymujemy

$$-\frac{1}{128} - \frac{1}{8} + D = 0,$$

skąd $D = 17/128$. Natomiast z warunku $f(\pi) = 0$ otrzymujemy

$$-\frac{1}{128} - \frac{1}{8} + \frac{3\pi^2}{16} + C\pi + \frac{17}{128} = 0,$$

co daje $C = -3\pi/16$.

Szukana funkcja jest więc dana wzorem

$$f(x) = -\frac{\cos 4x}{128} - \frac{\cos 2x}{8} + \frac{3x^2}{16} - \frac{3\pi x}{16} + \frac{17}{128},$$

a przy tym

$$f(2\pi) = -\frac{\cos 8\pi}{128} - \frac{\cos 4\pi}{8} + \frac{3(2\pi)^2}{16} - \frac{3\pi(2\pi)}{16} + \frac{17}{128} = \frac{3\pi^2}{8}.$$

1108. Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a < 7$, że

$$\int_a^7 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\int_a^7 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{x=a}^7 = \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} a,$$

pozostaje znaleźć liczbę a spełniającą równanie

$$\operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1,$$

czyli

$$\operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 1.$$

Ponieważ $\operatorname{arctg} t$ jest argumentem liczby zespolonej $1 + ti$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 1 &= \operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg}(-1) = \arg(1 + 7i) + \arg(1 - i) = \\ &= \arg((1 + 7i) \cdot (1 - i)) + 2k\pi = \arg(8 + 6i) + 2k\pi = \arg\left(1 + \frac{3}{4}i\right) + 2k\pi = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + 2k\pi, \end{aligned}$$

skąd po uwzględnieniu nierówności

$$0 < \operatorname{arctg} \frac{3}{4} < \frac{\pi}{2}$$

i

$$0 < \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 1 < \frac{\pi}{2}$$

wynika $k = 0$ oraz $a = 3/4$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia liczba $a = 3/4$.

1109. Podaj wartość całki oznaczonej. Wynik zapisz w postaci w albo $w \cdot \sqrt{p}$, gdzie w jest liczbą wymierną zapisaną w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, a p jest liczbą pierwszą.

$$\text{a) } \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = \mathbf{2/3}$$

$$\text{b) } \int_0^{\pi/3} \sin^3 x \, dx = \mathbf{5/24}$$

$$\text{c) } \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = \mathbf{3/8 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\text{d) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = \mathbf{5/12 \cdot \sqrt{2}}$$

1110. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych dodatnich parametru p , dla których podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z - 1| > |z - 3|$.

$$\text{a) } z = \log_2 p + i \cdot \log_3 p, \quad (\mathbf{4}, \infty)$$

$$\text{b) } z = \log_3 p + i \cdot \log_5 p, \quad (\mathbf{9}, \infty)$$

$$\text{c) } z = \log_5 p + i \cdot \log_7 p, \quad (\mathbf{25}, \infty)$$

$$\text{d) } z = \log_7 p + i \cdot \log_2 p, \quad (\mathbf{49}, \infty)$$

1111. Niech $z = 1 - i$. Podaj w postaci kartezjańskiej:

$$\text{a) } z^7 = \mathbf{8 + 8 \cdot i}$$

$$\text{b) } z^8 = \mathbf{16}$$

$$\text{c) } z^9 = \mathbf{16 - 16 \cdot i}$$

$$\text{d) } z^{10} = \mathbf{-32 \cdot i}$$

1112. Niech $z = \sqrt{3} + i$. Podaj część rzeczywistą potęgi liczby z :

$$\text{a) } \operatorname{Re}(z^5) = \mathbf{-16 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\text{b) } \operatorname{Re}(z^6) = \mathbf{-64}$$

$$\text{c) } \operatorname{Re}(z^7) = \mathbf{-64 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\text{d) } \operatorname{Re}(z^8) = \mathbf{-128}$$

1113. Podaj taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\bar{z} = z^{-1}$.

$$\text{a) } z = \frac{2}{3} + ai, \quad a = \mathbf{\sqrt{5}/3}$$

$$\text{b) } z = \frac{3}{5} + ai, \quad a = \mathbf{4/5}$$

$$\text{c) } z = \frac{1}{4} + ai, \quad a = \mathbf{\sqrt{15}/4}$$

$$\text{d) } z = \frac{4}{5} + ai, \quad a = \mathbf{3/5}$$

1114. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w , że

$$\arctg n + \arctg w = \arctg(n + 1).$$

$$\text{a) } n = 2, \quad w = \mathbf{1/7}$$

$$\text{b) } n = 3, \quad w = \mathbf{1/13}$$

$$\text{c) } n = 4, \quad w = \mathbf{1/21}$$

$$\text{d) } n = 5, \quad w = \mathbf{1/31}$$

1115. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w , że

$$\arctg n + \arctg w = \arctg(2n).$$

$$\text{a) } n = 1, \quad w = \mathbf{1/3}$$

$$\text{b) } n = 2, \quad w = \mathbf{2/9}$$

$$\text{c) } n = 3, \quad w = \mathbf{3/19}$$

$$\text{d) } n = 4, \quad w = \mathbf{4/33}$$