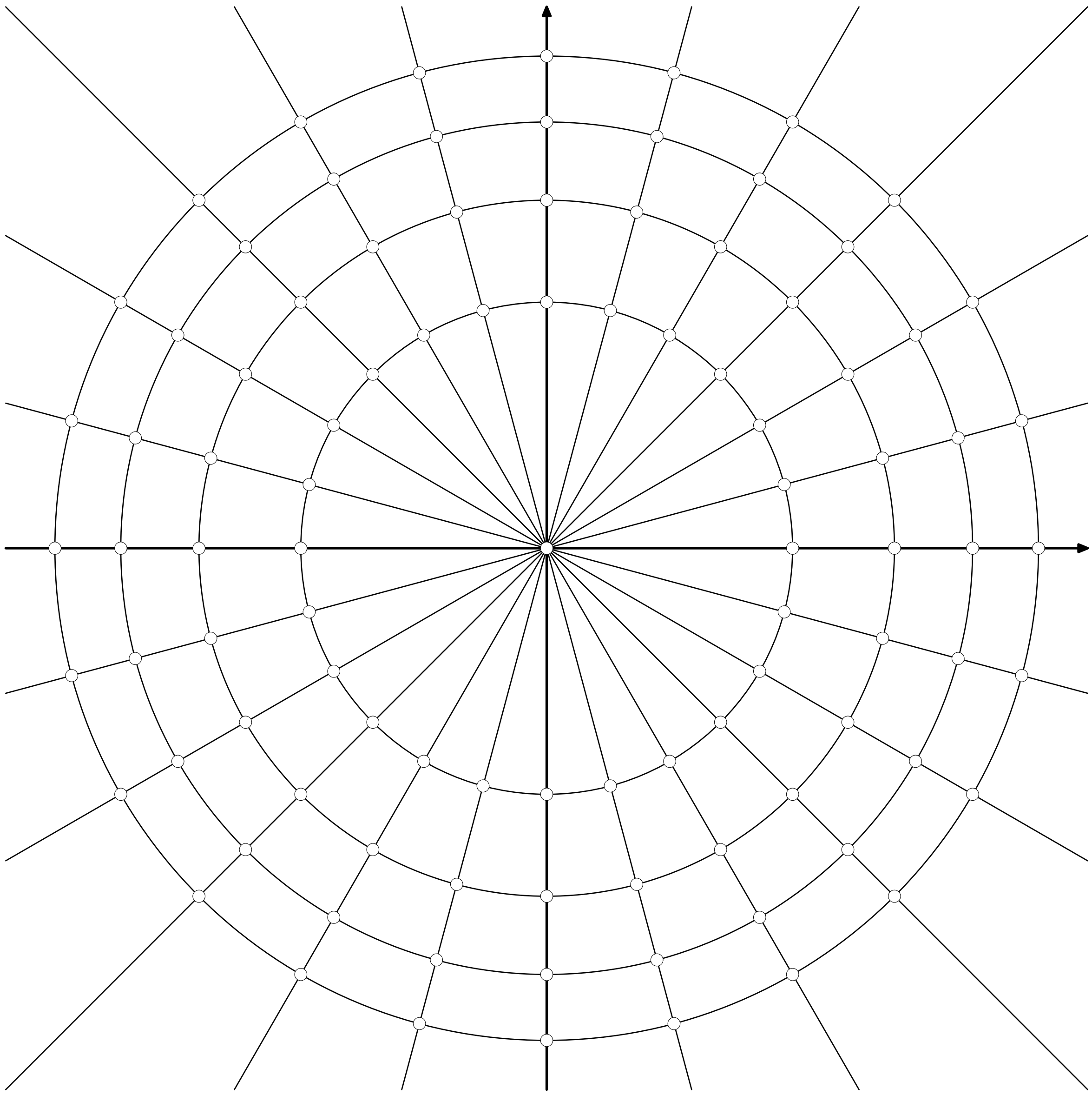
Kolokwium nr 6: środa 15.05.2024, godz. 14:15–15:45, materiał zad. 683–1115.

Zadania do omówienia na WYKŁADZIE WE WTOREK 30.04.2024.

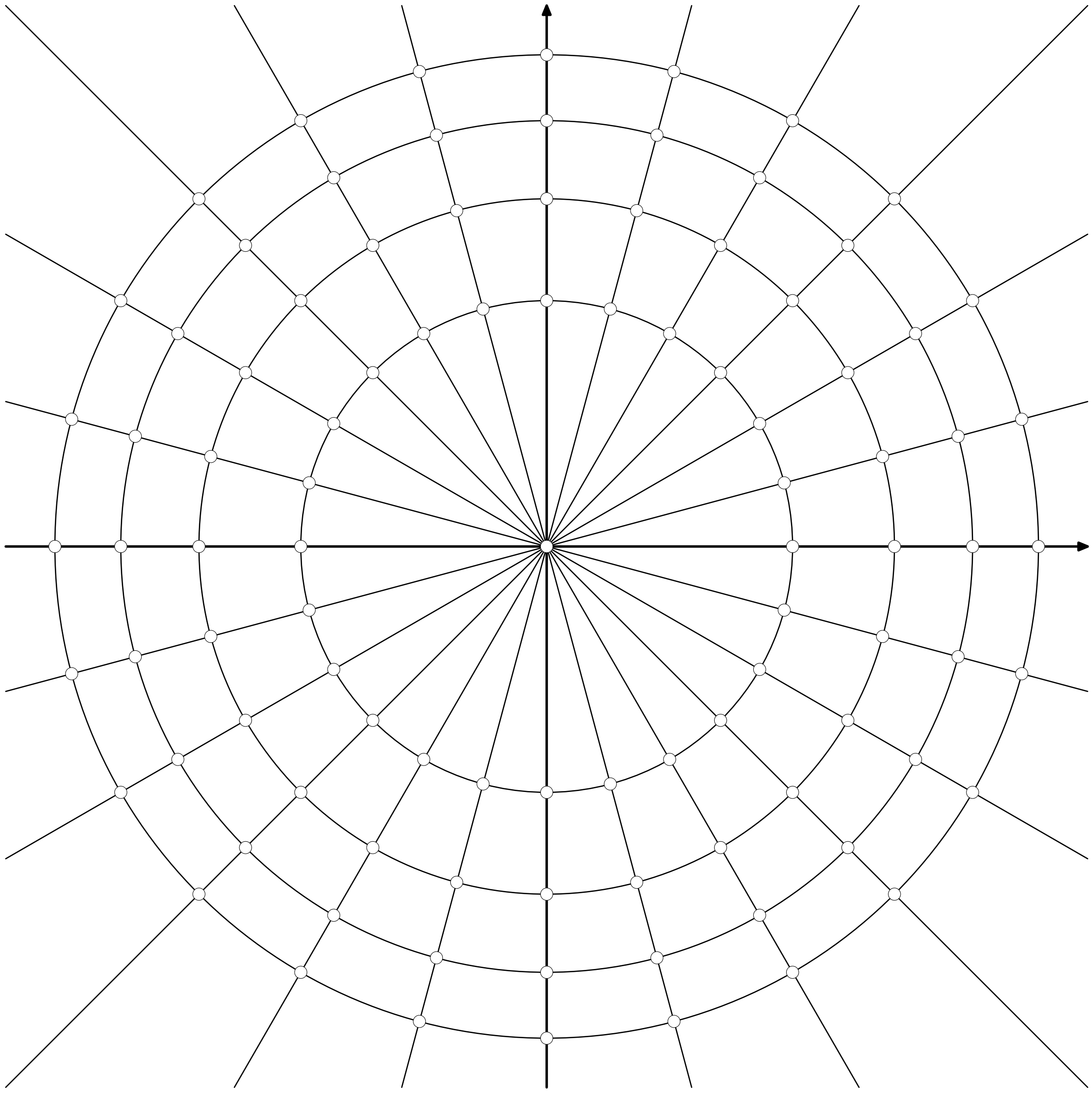
Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami !!!

Liczby zespolone i ich zastosowanie do wyprowadzania tożsamości trygonometrycznych.

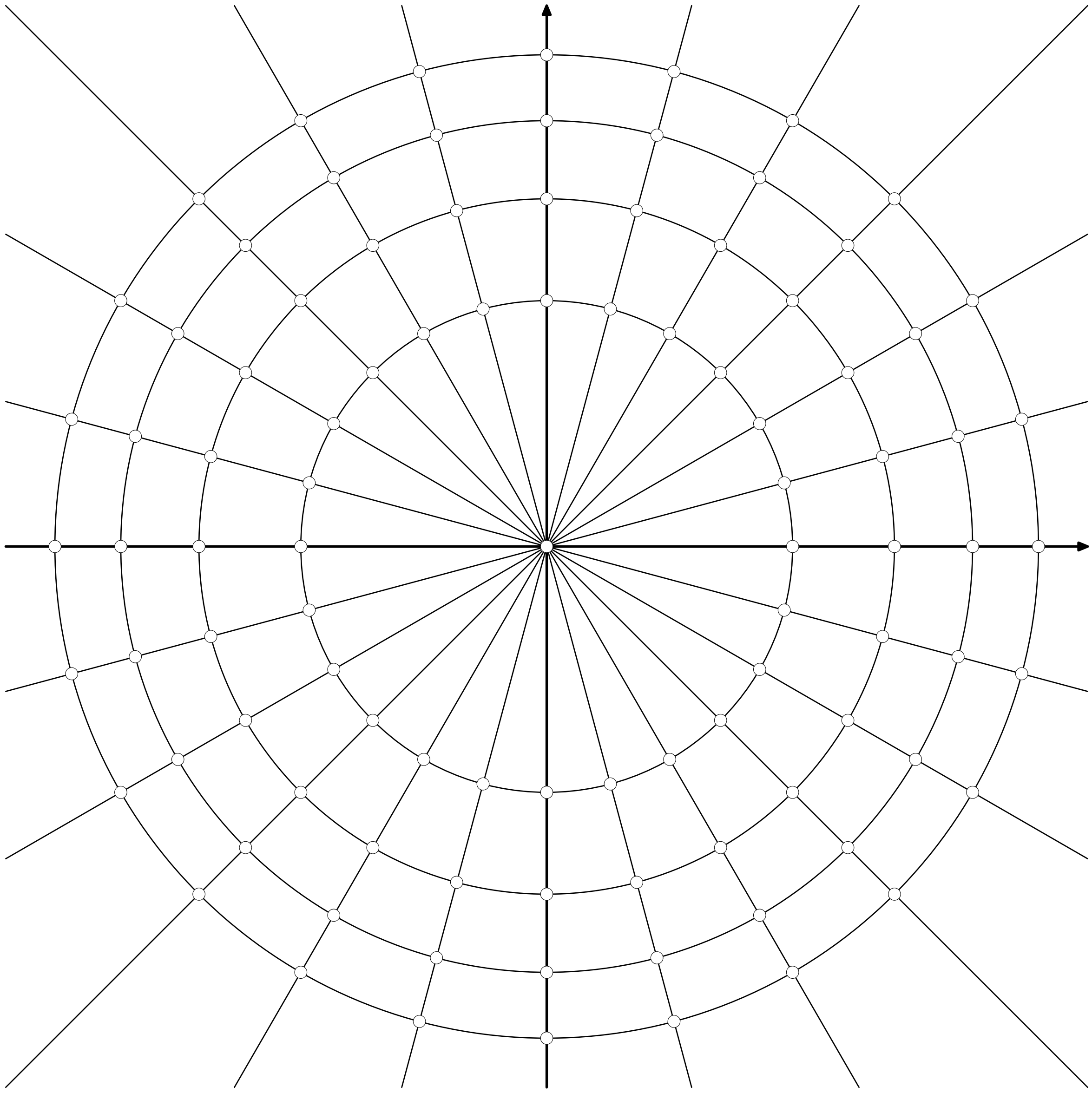
1099. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^4=-4$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n=1,2,3,4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



1100. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^9=27z^3$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n=1,2,3,4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



1101. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^7+4z^3=8z^4+32$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n=1,2,3,4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



1102. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^{\pi} \sin^7 x\, dx\,.$$

Przedstawić wynik w postaci ułamka nieskracalnego o dwucyfrowym liczniku i mianowniku.

1103. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi/6} \cos^6 x\, dx\,.$$

1104. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\pi} \sin^8 x\, dx\,.$$

1105. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\pi$, gdzie w liczbą wymierną.

1106. Udowodnić nierówność

$$\int_0^{4\pi} \cos^{10} x\, dx < \pi\,.$$

1107. Znaleźć taką funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że

$$f''(x)=\cos^4 x \quad \text{dla każdego} \quad x\in\mathbb{R}\,,$$

a ponadto $f(0)=f(\pi)=0$. Obliczyć $f(2\pi)$.

1108. Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a<7$, że

$$\int_a^7 \frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}\,.$$

1109. Podaj wartość całki oznaczonej. Wynik zapisz w postaci w albo $w\cdot\sqrt{p}$, gdzie w jest liczbą wymierną zapisaną w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, a p jest liczbą pierwszą.

a) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx =$ ....

b) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \sin^3 x\,dx =$ ....

c) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx =$ ....

d) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx =$ ....

1110. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych dodatnich parametru p, dla których podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z-1|>|z-3|$.

a) $z=\log_2 p+i\cdot\log_3 p$, ...

b) $z=\log_3 p+i\cdot\log_5 p$, ...

c) $z=\log_5 p+i\cdot\log_7 p$, ...

d) $z=\log_7 p+i\cdot\log_2 p$, ...

1111. Niech $z=1-i$. Podaj w postaci kartezjańskiej:

a) $z^7=$ ....

b) $z^8=$ ....

c) $z^9=$ ....

d) $z^{10}=$ ....

1112. Niech $z=\sqrt{3}+i$. Podaj część rzeczywistą potęgi liczby z:

a) $\mathrm{Re}\left(z^5\right)=$ ....

b) $\mathrm{Re}\left(z^6\right)=$ ....

c) $\mathrm{Re}\left(z^7\right)=$ ....

d) $\mathrm{Re}\left(z^8\right)=$ ....

1113. Podaj taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=z^{-1}$.

a) $z=\frac{2}{3}+ai$, $a=$ ....

b) $z=\frac{3}{5}+ai$, $a=$ ....

c) $z=\frac{1}{4}+ai$, $a=$ ....

d) $z=\frac{4}{5}+ai$, $a=$ ....

1114. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że

$$\operatorname{arctg} n+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(n+1)\,.$$

a) $n=2$, $w=$ ....

b) $n=3$, $w=$ ....

c) $n=4$, $w=$ ....

d) $n=5$, $w=$ ....

1115. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że

$$\operatorname{arctg} n+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(2n)\,.$$

a) $n=1$, $w=$ ....

b) $n=2$, $w=$ ....

c) $n=3$, $w=$ ....

d) $n=4$, $w=$ ....