

1077. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{2n}}{(2n)! \cdot n! \cdot n^n}. \quad (1)$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(4n+4)! \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)! \cdot (n+1)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(2n)! \cdot n! \cdot n^n}{(4n)! \cdot x^{2n}} \right| = \\ & = \frac{(4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4) \cdot x^2}{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} \rightarrow \frac{64 \cdot x^2}{e} \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $\frac{64 \cdot x^2}{e}$.

Jeżeli $\frac{64 \cdot x^2}{e} < 1$, czyli $|x| < \frac{\sqrt{e}}{8}$, to szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{64 \cdot x^2}{e} > 1$, czyli $|x| > \frac{\sqrt{e}}{8}$, to szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{\sqrt{e}}{8}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{\sqrt{e}}{8}$.

1078. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}}{n! \cdot n^n}. \quad (2)$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (2) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\binom{2n+2}{n+1} \cdot (2n+2)! \cdot x^{4n+4}}{(n+1)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot n^n}{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}} \right| = \\ & = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot |x|^4}{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} = \\ & = \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \cdot \frac{x^4}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \rightarrow 16 \cdot \frac{x^4}{e}. \end{aligned}$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (2) równej $16 \cdot \frac{x^4}{e}$.

Jeżeli $16 \cdot \frac{x^4}{e} < 1$, czyli $|x| < \frac{\sqrt[4]{e}}{2}$, to szereg (2) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $16 \cdot \frac{x^4}{e} > 1$, czyli $|x| > \frac{\sqrt[4]{e}}{2}$, to szereg (2) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (2) jest równy $\frac{\sqrt[4]{e}}{2}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{\sqrt[4]{e}}{2}$.

1079. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n}^3 \cdot x^{5n}}{n! \cdot 2^n}. \quad (3)$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (3) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot \binom{2n+2}{n+1}^3 \cdot x^{5n+5}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot 2^n}{n^n \cdot \binom{2n}{n}^3 \cdot x^{5n}} \right| &= \left| \frac{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot x^5 \cdot \binom{2n+2}{n+1}^3}{(n+1) \cdot 2 \cdot \binom{2n}{n}^3} \right| = \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot |x|^5 \cdot (2n+1)^3 \cdot (2n+2)^3}{2 \cdot (n+1)^3 \cdot (n+1)^3} \rightarrow 32e \cdot |x|^5 \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (3) równej $32e \cdot |x|^5$.

Jeżeli $32e \cdot |x|^5 < 1$, czyli $|x| < \frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{e}}$, to szereg (3) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $32e \cdot |x|^5 > 1$, czyli $|x| > \frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{e}}$, to szereg (3) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (3) jest równy $\frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{e}}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{e}}$.

1080. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{(n!)^n}.$$

Rozwiązanie:

Zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności danego szeregu. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^{n^3}}{(n!)^n}\right|} = \frac{|x|^{n^2}}{n!} = b_n.$$

Ponieważ nie umiemy od razu stwierdzić, do czego dąży b_n przy $n \rightarrow \infty$, stosujemy kryterium d'Alemberta, tym razem do **ciągu** (b_n) . Otrzymujemy

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|x|^{2n+1}}{n+1} = c_n.$$

Jeżeli nie umiemy od razu stwierdzić, do czego dąży c_n przy $n \rightarrow \infty$, stosujemy ponownie kryterium d'Alemberta, tym razem do **ciągu** (c_n) . Otrzymujemy

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = x^2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \rightarrow x^2$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Jeżeli $|x| < 1$, czyli $x^2 < 1$, to z kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (c_n) wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 < 1$.

Z kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (b_n) wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 < 1$. Także dla $x = \pm 1$ otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$.

Wobec tego z kryterium Cauchy'ego zastosowanego do danego szeregu potęgowego wynika, że jest on zbieżny.

Jeżeli $|x| > 1$, czyli $x^2 > 1$, to z kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (c_n) wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty > 1$.

Z kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (b_n) wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1$.

Wobec tego z kryterium Cauchy'ego zastosowanego do danego szeregu potęgowego wynika, że jest on rozbieżny.

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności danego szeregu potęgowego jest $[-1, 1]$.

1081. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (2n)! \cdot (8n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}} \quad (4)$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p , aby promień ten był dodatni i skończony.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (4) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{n+1} \cdot (2n+2)! \cdot (8n+8)! \cdot x^{p(n+1)}}{(n+1)! \cdot (n+1)^{p(n+1)}} \cdot \frac{n! \cdot n^{pn}}{2^n \cdot (2n)! \cdot (8n)! \cdot x^{pn}} \right| = \\ & = \frac{2 \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (8n+1) \cdot (8n+2) \cdot (8n+3) \cdot \dots \cdot (8n+8) \cdot |x|^p}{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{pn} \cdot (n+1)^p} = \end{aligned}$$

$$= \frac{32 \cdot (2n+1) \cdot (8n+1) \cdot (8n+2) \cdot (8n+3) \cdot \dots \cdot (8n+7)}{(n+1)^{p-1}} \cdot \frac{|x|^p}{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^p} \rightarrow 2^{27} \cdot \frac{|x|^p}{e^p}$$

przy $n \rightarrow \infty$, o ile $p-1=8$, bo tylko w tym przypadku pierwszy czynnik powyższego iloczynu ma granicę rzeczywistą dodatnią.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (4) równej $2^{27} \cdot \frac{|x|^9}{e^9}$ dla $p=9$.

Jeżeli $2^{27} \cdot \frac{|x|^9}{e^9} < 1$, czyli $|x| < \frac{e}{8}$, to szereg (4) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $2^{27} \cdot \frac{|x|^9}{e^9} > 1$, czyli $|x| > \frac{e}{8}$, to szereg (4) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (4) jest równy $\frac{e}{8}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma dla $p=9$ promień zbieżności $\frac{e}{8}$.

1082. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}}. \quad (5)$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy n -ty wyraz szeregu (5) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x przez a_n i zastosujmy do niego kryterium Cauchy'ego. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}} \right|} = \frac{n^{n^3} \cdot |x|^{n^3}}{(n!)^{n^2}} = b_n.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (b_n) stosujemy kryterium Cauchy'ego do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{n^3} \cdot |x|^{n^3}}{(n!)^{n^2}}} = \frac{n^{n^2} \cdot |x|^{n^2}}{(n!)^n} = c_n.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (c_n) stosujemy kryterium Cauchy'ego do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{c_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{n^2} \cdot |x|^{n^2}}{(n!)^n}} = \frac{n^n \cdot |x|^n}{n!} = d_n.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (d_n) w przypadku $x \neq 0$ stosujemy kryterium d'Alemberta do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot |x|^n} = |x| \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rightarrow e \cdot |x|$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów ciągu (d_n) równej $e \cdot |x|$.

Jeżeli $e \cdot |x| < 1$, czyli $|x| < 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 < 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (c_n) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 < 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 < 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu (5) wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś $e \cdot |x| > 1$, czyli $|x| > 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty > 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (c_n) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty > 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu (5) wnioskujemy, że szereg ten jest rozbieżny.

Zatem promień zbieżności szeregu potęgowego (5) jest równy $1/e$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $1/e$.

1083. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}} \quad (6)$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p , aby promień ten był dodatni i skończony.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (6) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(2n+2)! \cdot (4n+4)! \cdot x^{p(n+1)}}{(n+1)! \cdot (n+1)^{p(n+1)}} \cdot \frac{n! \cdot n^{pn}}{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}} \right| = \\ &= \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4) \cdot |x|^p}{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{pn} \cdot (n+1)^p} = \\ &= \frac{8 \cdot (2n+1) \cdot (4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3)}{(n+1)^{p-1}} \cdot \frac{|x|^p}{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^p} \rightarrow 2^{10} \cdot \frac{|x|^p}{e^p} \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$, o ile $p-1=4$, bo tylko w tym przypadku pierwszy czynnik powyższego iloczynu ma granicę rzeczywistą dodatnią.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (6) równej $2^{10} \cdot \frac{|x|^5}{e^5}$ dla $p = 5$.

Jeżeli $2^{10} \cdot \frac{|x|^5}{e^5} < 1$, czyli $|x| < \frac{e}{4}$, to szereg (6) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $2^{10} \cdot \frac{|x|^5}{e^5} > 1$, czyli $|x| > \frac{e}{4}$, to szereg (6) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (6) jest równy $\frac{e}{4}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma dla $p = 5$ promień zbieżności $\frac{e}{4}$.

1084. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n \cdot 64^n} \cdot x^{3n}}{5n+7}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego szeregu potęgowego traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left| \frac{\sqrt{(n+1) \cdot 64^{n+1}} \cdot x^{3n+3}}{5n+12} \cdot \frac{5n+7}{\sqrt{n \cdot 64^n} \cdot x^{3n}} \right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot 8 \cdot |x|^3 \cdot \frac{5n+7}{5n+12} \rightarrow 8 \cdot |x|^3$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów danego szeregu potęgowego równej $8 \cdot |x|^3$.

Jeżeli $8 \cdot |x|^3 < 1$, czyli $|x| < 1/2$, to szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $8 \cdot |x|^3 > 1$, czyli $|x| > 1/2$, to szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $1/2$.

Dla $x = 1/2$ otrzymujemy szereg, który na mocy kryterium porównawczego jest rozbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5n+7} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5n+7n} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

Dla $x = -1/2$ otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot (-1)^n}{5n+7},$$

który jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne – oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{5n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{5 + \frac{7}{n}} = \frac{0}{5+0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{\sqrt{n}}{5n+7} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{5n+12},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \cdot (5n+12) &\geq \sqrt{n+1} \cdot (5n+7), \\ n \cdot (5n+12)^2 &\geq (n+1) \cdot (5n+7)^2, \\ n \cdot (25n^2 + 120n + 144) &\geq (n+1) \cdot (25n^2 + 70n + 49), \\ 25n^3 + 120n^2 + 144n &\geq 25n^3 + 95n^2 + 119n + 49, \\ 25n^2 + 25n &\geq 49, \end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny dla $x = -1/2$ na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma przedział zbieżności $[-1/2, 1/2)$.

Uwaga: Stosowanie kryterium d'Alemberta nie jest konieczne, ale jego unikanie nie wydaje się specjalnie praktyczne. Można bowiem wyobrazić sobie następujące rozwiązanie:

- Jakimś sposobem zgadujemy, że promień zbieżności jest równy $1/2$.
- Dowodzimy jak w przedstawionym rozwiązaniu, że szereg jest rozbieżny dla $x = 1/2$ i zbieżny dla $x = -1/2$.
- Przedstawiamy rozumowanie, z którego wynika, że jeśli szereg potęgowy jest rozbieżny dla $x = 1/2$ i zbieżny dla $x = -1/2$, to jego promień zbieżności jest równy $1/2$.

1085. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+2)^n \cdot x^n}{(7n+3)^n}.$$

Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności.

Rozwiązanie:

Zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności danego w zadaniu szeregu traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x . Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left| \frac{(5n+2)^n \cdot x^n}{(7n+3)^n} \right|} = \frac{(5n+2) \cdot |x|}{7n+3} \rightarrow \frac{5 \cdot |x|}{7}.$$

Jeżeli $\frac{5 \cdot |x|}{7} < 1$, czyli $|x| < \frac{7}{5}$, to dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{5 \cdot |x|}{7} > 1$, czyli $|x| > \frac{7}{5}$, to dany w zadaniu szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego jest równy $\frac{7}{5}$.

Pozostaje rozstrzygnąć zbieżność szeregu na końcach przedziału zbieżności, czyli dla $x = \pm 7/5$. W tym przypadku rozważymy ciąg wartości bezwzględnych wyrazów szeregu:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(5n+2)^n \cdot x^n}{(7n+3)^n} \right| &= \frac{(5n+2)^n \cdot 7^n}{(7n+3)^n \cdot 5^n} = \frac{(35n+14)^n}{(35n+15)^n} = \left(1 - \frac{1}{35n+15} \right)^n = \\ &= \left(\left(1 - \frac{1}{35n+15} \right)^{35n+15} \right)^{\frac{n}{35n+15}} \rightarrow (e^{-1})^{1/35} = \frac{1}{\sqrt[35]{e}} \neq 0. \end{aligned}$$

Ponieważ wartości bezwzględne wyrazów szeregu dążą do liczby różnej od zera, szereg jest rozbieżny.

Odpowiedź:

Przedziałem zbieżności danego szeregu potęgowego jest przedział $(-7/5, 7/5)$.

1086. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{22} \cdot e^{x^7}.$$

Obliczyć $f^{(k)}(0)$ dla $k = 50, 51, 52, \dots, 60$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru¹

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

wynika

$$e^{x^7} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{7n}}{n!}$$

i w konsekwencji

$$f(x) = x^{22} \cdot e^{x^7} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{7n+22}}{n!}.$$

Zapisaaliśmy więc funkcję f w postaci sumy szeregu potęgowego zbieżnego na całej prostej. Ze współczynników tego szeregu można odczytać pochodne funkcji f w zerze, a dokładniej: jeśli w szeregu występuje wyraz $a_k x^k$, to

$$f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k.$$

Interesujące nas niezerowe wyrazy szeregu potęgowego odpowiadają $n=4, k=50$ oraz $n=5, k=57$.

¹Jeśli czujesz się niepewnie patrząc na wzory ze znakiem \sum , rozpisz sobie każdą z sum "z kropczkami", aby wyraźnie widzieć, jakie składniki zawiera.

Wobec tego

$$f^{(50)}(0) = \frac{50!}{4!},$$

$$f^{(57)}(0) = \frac{57!}{5!}$$

oraz

$$f^{(k)}(0) = 0$$

dla pozostałych k wymienionych w treści zadania.

1087. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą zdefiniowaną dla $x \neq 0$ wzorem

$$f(x) = \frac{e^x - \sum_{n=0}^{2020} \frac{x^n}{n!}}{x^{2021}}.$$

Obliczyć $f(0)$ oraz $f'(0)$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

wynika

$$e^x - \sum_{n=0}^{2020} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=2021}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

i w konsekwencji

$$f(x) = \frac{e^x - \sum_{n=0}^{2020} \frac{x^n}{n!}}{x^{2021}} = \sum_{n=2021}^{\infty} \frac{x^{n-2021}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2021)!}.$$

Dla $x \neq 0$ zapisaliśmy więc funkcję f w postaci sumy szeregu potęgowego zbieżnego na całej prostej, a ponieważ zarówno funkcja f jak i suma powyższego szeregu potęgowego są funkcjami ciągłymi, równość zachodzi także dla $x = 0$.

Wobec tego²

$$f(0) = \frac{1}{2021!}$$

oraz³

$$f'(0) = \frac{1}{2022!}.$$

1088. Obliczyć sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

²Uwzględniając wyraz ostatniego szeregu odpowiadający $n = 0$.

³Uwzględniając pochodną wyrazu odpowiadającego $n = 1$.

Wskazówka: Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

W tym celu zastanów się, jakiego prostego szeregu pochodną jest ten szereg lub szereg bardzo do niego zbliżony.

Rozwiązanie:

Po obustronnym zróżniczkowaniu wzoru⁴

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

otrzymujemy⁵

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

skąd po obustronnym wymnożeniu przez x dostajemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Podstawienie $x = 1/2$ daje po lewej stronie szereg liczbowy z treści zadania, a prawa strona jest równa **2**.

Odpowiedź: Szereg liczbowy podany w treści zadania ma sumę **2**.

W poniższym zadaniu masz podany szkielet rozwiązania. Twoje zadanie to uzupełnić brakujące fragmenty w miejscu kropek.

1089. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}. \quad (1)$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział $[-1, 1)$. Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}.$$

⁴Wzór ten jest prawdziwy dla $x \in (-1, 1)$.

⁵Składnik odpowiadający $n=0$ jest zerowy, więc go pomijamy.

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{1 - x^3} dx = \\ = (c-b) \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}} \right) - \frac{(b+c)\ln|1-x|}{3} + \frac{(b+c)\ln(x^2+x+1)}{6} - \frac{a\ln|1-x^3|}{3} + C$$

dla $a=0$, $b=0$, $c=1$ otrzymujemy

$$f(x) = \int f'(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\ln|1-x|}{3} + \frac{\ln(x^2+x+1)}{6} + C. \quad (2)$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x=0$. Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(0) = 0,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(0) = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}(1/\sqrt{3}) - \frac{\ln 1}{3} + \frac{\ln 1}{6} + C = \frac{\sqrt{3}\pi}{18} + C.$$

Stąd

$$C = -\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

i ostatecznie

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\ln|1-x|}{3} + \frac{\ln(x^2+x+1)}{6} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18}. \quad (3)$$

Przyjmując $x=-1$ we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy $-f(-1)$. Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(-1) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{arctg}(-1/\sqrt{3}) - \frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 1}{6} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{\ln 2}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{9} - \frac{\ln 2}{3}.$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa $\frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{\ln 2}{3}$.