Kolokwium nr 6: środa 15.05.2024, godz. 14:15–15:45, materiał zad. 683–1115.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 9.05.2024.

Zadania podobne do zadań wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Szeregi potęgowe.

Początkowe 5 zadań jest przeznaczonych do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

1077. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{2n}}{(2n)! \cdot n! \cdot n^n}.$$

1078. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}}{n! \cdot n^n}.$$

1079. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n}^3 \cdot x^{5n}}{n! \cdot 2^n}.$$

1080. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{(n!)^n}.$$

1081. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (2n)! \cdot (8n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p, aby promień ten był dodatni i skończony.

1082. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}}.$$

1083. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p, aby promień ten był dodatni i skończony.

1084. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n\cdot 64^n}\cdot x^{3n}}{5n+7}\,.$$

1085. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n+2)^n\cdot x^n}{(7n+3)^n}\,.$$
Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności.

1086. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem
$$f(x)=x^{22}\cdot e^{x^7}\,.$$
Obliczyć $f^{(k)}(0)$ dla $k=50, 51, 52, \ldots, 60$.

1087. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą zdefiniowaną dla $x\neq 0$ wzorem
$$f(x)=\frac{e^x-\sum\limits_{n=0}^{2020}\frac{x^n}{n!}}{x^{2021}}\,.$$
Obliczyć $f(0)$ oraz $f'(0)$.

1088. Obliczyć sumę
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\,.$$
Wskazówka: Obliczyć sumę szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\,.$$
W tym celu zastanowić się, jakiego prostego szeregu pochodną jest ten szereg lub szereg bardzo do niego zbliżony.

W poniższym zadaniu masz podany szkielet rozwiązania. Twoje zadanie to uzupełnić brakujące fragmenty w miejscu kropek.

1089. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}\,.$$
Rozwiązanie:
Rozważmy funkcję f daną wzorem
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\,. \tag{1}$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział .... Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\text{..........................}=\text{...........................}\,.$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{1-x^3}dx=$$

$$=(c-b)\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{(b+c)\ln|1-x|}{3}+\frac{(b+c)\ln(x^2+x+1)}{6}-\frac{a\ln|1-x^3|}{3}+C$$

dla $a=$.........., $b=$.........., $c=$.......... otrzymujemy

$$f(x)=\int f'(x)dx=\text{...}\,. \qquad (2)$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x=$....... Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(......)=......\,,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(......)=\text{..}+C=$$

$$=\text{..}+C\,.$$

Stąd

$$C=\text{..}$$

i ostatecznie

$$f(x)=\text{..}\,. \qquad (3)$$

Przyjmując $x=$...... we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy .... Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(......)=\text{..}=$$

$$=\text{..}=$$

$$=\text{..}\,.$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa

....

1090. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} .$$

1091. Podać przykład szeregu potęgowego o promieniu zbieżności 2 i sumie równej 7 dla $x=1$.

1092. Podać przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

1093. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(54n+1)^n \cdot x^{3n}}{(81n+2)^n} .$$

1094. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n \cdot x^n ,$$

gdzie (L_n) jest ciągiem Lucasa:

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_n = L_{n-2} + L_{n-1} \ \text{ dla } \ n \geqslant 2$$

lub równoważnie

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

1095. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^n .$$

1096. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} .$$

1097. Obliczyć sumę szeregu potęgowego[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (n+1)} .$$

Wyliczyć wartość sumy szeregu na końcach przedziału zbieżności.

1098. Różnicą szeregów potęgowych $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ nazywamy szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \cdot x^n .$$

Rozważamy szereg potęgowy będący różnicą szeregów potęgowych $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}$. Obliczyć jego sumę dla $x=1$.

[1] Wskazówka: Wykorzystać szereg z poprzedniego zadania – zastosować do niego mnożenie/dzielenie przez x oraz całkowanie wyraz po wyrazie.