Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 25.04.2024.

Zadania podobne do zadań wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Szeregi o wyrazach dowolnego znaku.

Początkowych 7 zadań jest przeznaczonych do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

1035. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{(3n-1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+5)}\,.$$

1036. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+2}\,.$$

1037. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{(3n+1)\cdot(3n+4)\cdot(3n+7)\cdot(3n+10)}\,.$$

1038. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+100}\,.$$

1039. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)\,.$$

1040. Wiedząc, że
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2\,,$$
obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występuje 100 wyrazów dodatnich i jeden ujemny:
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{2}+\frac{1}{201}+\frac{1}{203}+\ldots+\frac{1}{399}-\frac{1}{4}+\frac{1}{401}+\frac{1}{403}+\ldots+\frac{1}{599}-\frac{1}{6}+$$
$$+\frac{1}{601}+\frac{1}{603}+\ldots+\frac{1}{799}-\frac{1}{8}+\frac{1}{801}+\frac{1}{803}+\ldots+\frac{1}{999}-\frac{1}{10}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1003}+\ldots$$

1041. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n^2}\cdot\binom{2n}{n}^n\cdot n^{n^2}}{(n!)^n}$$
w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

1042. Wśród poniższych sześciu szeregów wskaż szereg zbieżny, a następnie udowodnij jego zbieżność. Jeśli potrafisz, oblicz jego sumę.

$$(\mathbf{A})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{7n+10} \qquad (\mathbf{B})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2+1)}{3n^2+n} \qquad (\mathbf{C})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+n}$$

$$(\mathbf{D})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+1} \qquad (\mathbf{E})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n^2+1)}{77n-1} \qquad (\mathbf{F})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{2011n+2012}$$

W każdym z czterech kolejnych zadań udziel siedmiu **niezależnych** odpowiedzi:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)
R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)
N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)
X - nie istnieje szereg spełniający podany warunek

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że jego wyrazy są różne od zera, a ponadto ciąg jego wyrazów (a_n) spełnia podany warunek

1043. $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, gdzie

a) $g=-3$ .... **b)** $g=-1$ .... **c)** $g=-1/3$ ....

d) $g=0$ ..... **e)** $g=1/3$ ..... **f)** $g=1$ ..... **g)** $g=3$ .....

1044. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, gdzie

a) $g=-3$ .... **b)** $g=-1$ .... **c)** $g=-1/3$ ....

d) $g=0$ ..... **e)** $g=1/3$ ..... **f)** $g=1$ ..... **g)** $g=3$ .....

1045. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$, gdzie

a) $g=-3$ .... **b)** $g=-1$ .... **c)** $g=-1/3$ ....

d) $g=0$ ..... **e)** $g=1/3$ ..... **f)** $g=1$ ..... **g)** $g=3$ .....

1046. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g$, gdzie

a) $g=-3$ .... **b)** $g=-1$ .... **c)** $g=-1/3$ ....

d) $g=0$ ..... **e)** $g=1/3$ ..... **f)** $g=1$ ..... **g)** $g=3$ .....

1047. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(p^2-3\right)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p\in$ ....

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-5\right)^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p\in$ ....

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-8\right)^n}{n}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p\in$ ....

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-10\right)^n}{n^2}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p\in$ ....

1048. W każdym z poniższych 16 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z, R, N**:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ jest rozbieżny, ciąg (c_n) jest zbieżny, ciąg (d_n) jest rozbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności

a) ciągu (a_n) ....

b) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ ....

c) ciągu (b_n) ....

d) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n$ ....

e) ciągu (a_n+b_n) ....

f) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ ....

g) ciągu (c_n+d_n) ....

h) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n+d_n)$ ....

i) ciągu (a_n+c_n) ....

j) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+c_n)$ ....

k) ciągu (a_n+d_n) ....

l) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+d_n)$ ....

m) ciągu (b_n+c_n) ....

n) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n+c_n)$ ....

o) ciągu (b_n+d_n) ....

p) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n+d_n)$ ....

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

1049. $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n > 0$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

1050. $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

1051. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

1052. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n$ dla $n \leqslant 100$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

1053. $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

1054. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

1055. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

1056. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

1057. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_{2^n} + a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}-1})$ jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

1058. Szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

1059. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

1060. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot a^n}{n! \cdot n^{2n}}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

1061. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^n}$ **1062.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^{n+1}}$ **1063.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^{n+2}}$

1064. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)}$$

jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

1065. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 10^{10}}$$

jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Rozstrzygnąć, które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne. Wskazać wśród poniższych przykładów dwa szeregi, jeden zbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, drugi rozbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, o ilorazie wyrazów a_n/b_n dążącym do 1.

1066. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **1067.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n}$ **1068.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$

1069. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n}$ **1070.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!}$ **1071.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}}$

1072. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **1073.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$ **1074.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)(-1)^n$

1075. $1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots + 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \ldots - \frac{1}{k} + \ldots$ (k razy)

1076. $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \ldots - \frac{1}{k^2} + \ldots$ (k razy)