Kolokwium nr 5: środa 24.04.2024, godz. 14:15–15:45, materiał zad. 683–1034.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 18.04.2024.

Zadania podobne do zadań wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Szeregi o wyrazach nieujemnych.

Początkowych 8 zadań jest przeznaczonych do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

1000. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)$$

jest zbieżny.

1001. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[4]{n^4+n}-n\right)$$

jest zbieżny.

1002. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2}\right).$$

1003. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{28^n\cdot(n!)^3}.$$

1004. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot 18^n}{\binom{3n}{n}\cdot n^n}.$$

1005. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{7^n+\binom{2n}{n}^2}}{3^n}$$

jest zbieżny.

1006. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2}\cdot n^{n^3}}.$$

1007. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1}}$, ... **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, ...

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[4]{n^p+1}}$, ... **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt[5]{n^p+1}}$, ...

1008. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

też jest zbieżny.

Wskazówka: Zastosować nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną do liczb a_n oraz $\frac{1}{n^2}$.

1009. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 9\,.$$

Udowodnić jedną z poniższych nierówności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leqslant 5 \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leqslant 3 \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

Wskazówka: Skorzystać z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną.

1010. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leqslant 1\,.$$

1011. Dany jest taki szereg zbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant 8 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leqslant 64\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant C\,,$$

gdzie $C=27$ **(wersja łatwiejsza)** lub $C=16$ **(wersja trudniejsza).**

1012. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 8 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leqslant 2\,.$$

1013. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru k, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[4]{n^5+n^k} - \sqrt[4]{n^5} \right)$$

jest zbieżny.

1014. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą dodatnią M, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!}{p^n \cdot (n!)^4}$$

jest zbieżny dla $p>M$ i rozbieżny dla $0<p<M$.

1015. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą dodatnią M, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot p^n}{\binom{4n}{n} \cdot n^n}$$

jest rozbieżny dla $p>M$ i zbieżny dla $0<p<M$.

1016. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{33^n + \binom{3n}{n}^2}}{6^n}$$

jest zbieżny.

1017. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{33^n + \binom{3n}{n}^2}}{7^n}$$

jest zbieżny.

1018. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt[3]{n^2}}$$

też jest zbieżny.

1019. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{a_n}}{n}$$

też jest zbieżny.

1020. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n}}$$

jest rozbieżny.

1021. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k+1}}{n^7+1} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{k+1}+1}}{n^7+1}$$

dla tak dobranej wartości parametru naturalnego k, że dokładnie jeden z tych szeregów jest zbieżny.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów:

1022. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ **1023.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ **1024.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

1025. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{110n+10}{110n+11}\right)^n$ **1026.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}$ **1027.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$

1028. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\cdot \sqrt{4^n+3^n}}$ **1029.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}}$ **1030.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{1000}}{2^{n^2}}$

1031. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!}$ **1032.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4-7n^3+1}{19n^5-13n^2+1}$ **1033.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4-7n^3+1}{19n^6-13n^2+1}$

1034. Obliczyć

$$\left[\log_3 \sum_{n=1}^{2^{2024}} \frac{1}{n}\right].$$

Przypomnieć sobie listę 14 z pierwszego semestru !
