959. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{x^\pi\, dx}{\sqrt{x^9+x^8}}\,.$$

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{x^\pi\, dx}{\sqrt{x^9+x^8}} = \int_0^1 \frac{x^\pi\, dx}{\sqrt{x^9+x^8}} + \int_1^\infty \frac{x^\pi\, dx}{\sqrt{x^9+x^8}}\,.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^\pi\, dx}{\sqrt{x^9+x^8}} \leqslant \int_0^1 \frac{x^\pi\, dx}{\sqrt{0+x^8}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{4-\pi}} < +\infty\,,$$

bo $4-\pi<1$.

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{x^\pi\, dx}{\sqrt{x^9+x^8}} \leqslant \int_1^\infty \frac{x^\pi\, dx}{\sqrt{x^9+0}} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{4,5-\pi}} < +\infty\,,$$

bo $4,5-\pi>1$.

960. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{x^e\, dx}{x^4+x^3}\,.$$

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{x^e\, dx}{x^4+x^3} = \int_0^1 \frac{x^e\, dx}{x^4+x^3} + \int_1^\infty \frac{x^e\, dx}{x^4+x^3}\,.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^e\, dx}{x^4+x^3} \leqslant \int_0^1 \frac{x^e\, dx}{0+x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{3-e}} < +\infty\,,$$

bo $3-e<1$.

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{x^e\, dx}{x^4+x^3} \leqslant \int_1^\infty \frac{x^e\, dx}{x^4+0} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{4-e}} < +\infty\,,$$

bo $4-e>1$.

961. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}}\,dx=\int_0^1 \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}}\,dx+\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}}\,dx\,.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}}\,dx\leqslant\int_0^1 \frac{\sqrt{3x^3+x^3}}{\sqrt[3]{0+x^7}}\,dx=2\cdot\int_0^1 \frac{dx}{x^{5/6}}<+\infty\,,$$

bo $5/6<1$.

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}}\,dx\leqslant\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^5+3x^5}}{\sqrt[3]{x^{11}+0}}\,dx=2\cdot\int_1^\infty \frac{dx}{x^{7/6}}<+\infty\,,$$

bo $7/6>1$.

962. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\,dx$$

jest zbieżna.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\,dx=\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\,dx+\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\,dx\,.$$

Zbadamy, dla których wartości parametru p całki występujące w powyższej sumie są zbieżne. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\,dx\leqslant\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{0+x^3}}\,dx=\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2-p}}<+\infty\,,$$

o ile $3/2-p<1$, czyli $p>1/2$.

Ponadto

$$\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\,dx\geqslant\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^3+x^3}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2-p}}=+\infty\,,$$

o ile $3/2-p\geqslant 1$, czyli $p\leqslant 1/2$.

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\,dx \leqslant \int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+0}}\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-p}} < +\infty\,,$$

o ile $2-p>1$, czyli $p<1$.

Ponadto

$$\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\,dx \geqslant \int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^4}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-p}} = +\infty\,,$$

o ile $2-p\leqslant 1$, czyli $p\geqslant 1$.

Wniosek: Jeżeli $1/2<p<1$, to obydwie całki powstałe z podziału przedziału całkowania są zbieżne, a więc i wyjściowa całka jest zbieżna. W przeciwnym razie jedna z tych całek jest rozbieżna, a zatem wyjściowa całka jest rozbieżna.

Odpowiedź: Podana całka jest zbieżna dla $p\in(1/2,\,1)$.

963. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^\infty \frac{5x-2}{x^3+x^2-2x}\,dx$$

i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 1.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że liczby 0 i 1 są miejscami zerowymi wielomianu sześciennego występującego w mianowniku funkcji podcałkowej, skąd otrzymujemy

$$x^3+x^2-2x = x\cdot(x-1)\cdot(x+2)\,.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{5x-2}{x\cdot(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}\,,$$

$$5x-2 = A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot x\cdot(x+2)+C\cdot x\cdot(x-1)\,.$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za x wartości 0, 1 i -2 otrzymując odpowiednio

dla $x=0$ $\quad -2=-2A,\quad$ skąd $\quad A=1,$

dla $x=1$ $\quad 3=3B,\quad$ skąd $\quad B=1,$

dla $x=-2$ $\quad -12=6C,\quad$ skąd $\quad C=-2.$

Wobec tego

$$\int_4^\infty \frac{5x-2}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int_4^\infty \frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}\,dx = \ln|x|+\ln|x-1|-2\cdot\ln|x+2|\Big|_{x=4}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(\ln|x|+\ln|x-1|-2\cdot\ln|x+2|\right)\right)-\ln 4-\ln 3+2\cdot\ln 6 = \left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x\cdot(x-1)}{(x+2)^2}\right)+\ln 3 =$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot(x-1)}{(x+2)^2}\right)+\ln 3=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^2}\right)+\ln 3=\ln 1+\ln 3=\ln 3>\ln e=1\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln 3>1$.

Uwaga: Całki

$$\int_4^\infty \frac{1}{x}\,dx,\qquad \int_4^\infty \frac{1}{x-1}\,dx,\qquad \int_4^\infty \frac{1}{x+2}\,dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty}\ln|x|,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln|x-1|,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln|x+2|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

964. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{1/3}^{\infty}\frac{dx}{16x^3+x}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $\ln w$, gdzie w liczbą wymierną dodatnią.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x\cdot(16x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{16x^2+1}\,,$$

$$1=A\cdot\left(16x^2+1\right)+(Bx+C)\cdot x\,,$$

$$1=16Ax^2+A+Bx^2+Cx\,,$$

$$1=A,\qquad 0=C,\qquad 0=16A+B\,,$$

$$A=1,\qquad B=-16,\qquad C=0\,.$$

Wobec tego[1]

$$\int_{1/3}^{\infty}\frac{dx}{x\cdot(16x^2+1)}=\int_{1/3}^{\infty}\frac{1}{x}-\frac{16x}{16x^2+1}\,dx=\left(\ln|x|-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(16x^2+1\right)\right)\Bigg|_{x=1/3}^{\infty}=$$

$$=\ln\sqrt{\frac{x^2}{16x^2+1}}\Bigg|_{x=1/3}^{\infty}=\left(\lim_{x\to\infty}\ln\sqrt{\frac{x^2}{16x^2+1}}\right)-\ln\sqrt{\frac{1/9}{\frac{16}{9}+1}}=\ln\sqrt{\frac{1}{16}}-\ln\sqrt{\frac{1}{16+9}}=$$

$$=\ln\frac{1}{4}-\ln\frac{1}{5}=\ln\frac{5}{4}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln\frac{5}{4}$.

[1] Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

Uwaga: Całki

$$\int_{1/3}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_{1/3}^{\infty} \frac{x}{16x^2+1}\,dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty} \ln|x|, \qquad \lim_{x\to\infty} \ln\left(16x^2+1\right)$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

Odpowiednie poradzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane.

965. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{7}^{\infty} \frac{dx}{x^3+x}$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{(x^2+1)\cdot x} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x}\,,$$

$$1 = (Ax+B)\cdot x + C\cdot\left(x^2+1\right)\,,$$

$$1 = Ax^2+Bx+Cx^2+C\,,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & A+C \\ 0 & = & B \\ 1 & = & C \end{array}\right.$$

Stąd otrzymujemy $A=-1$.

Wobec tego

$$\int_{7}^{\infty} \frac{dx}{x^3+x} = \int_{7}^{\infty} -\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x}\,dx = -\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}+\ln|x|\,\Bigg|_{x=7}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}+\ln x\right)\right)+\frac{\ln 50}{2}-\ln 7 = \left(\lim_{x\to\infty}\ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right)+\frac{\ln 50}{2}-\ln 7 =$$

$$= \left(\ln\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+x^{-2}}}\right)+\frac{\ln 50}{2}-\ln 7 = \ln 1+\frac{\ln 50}{2}-\ln 7 = \frac{\ln 50}{2}-\ln 7\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość $\dfrac{\ln 50}{2}-\ln 7$.

Uwaga: Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest istotną częścią zadania. Bez tego zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnym wyniku liczbowym.

966. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_6^\infty \frac{3x+2}{x^3-4x}\,dx$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{3x+2}{x^3-4x} = \frac{3x+2}{(x-2)\cdot x\cdot(x+2)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+2}\,,$$

$$3x+2 = A\cdot x\cdot(x+2)+B\cdot(x-2)\cdot(x+2)+C\cdot(x-2)\cdot x\,. \qquad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości ($\heartsuit$), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C.

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości ($\heartsuit$) kolejno $x=2$, $x=0$, $x=-2$ otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned} 8=8A, &\quad \text{skąd} \quad A=1\,,\\ 2=-4B, &\quad \text{skąd} \quad B=-\frac{1}{2}\,,\\ -4=8C, &\quad \text{skąd} \quad C=-\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\int_6^\infty \frac{3x+2}{x^3-4x}\,dx = \int_6^\infty \frac{1}{x-2}-\frac{1/2}{x}-\frac{1/2}{x+2}\,dx = \ln|x-2|-\frac{\ln|x|}{2}-\frac{\ln|x+2|}{2}\Bigg|_{x=6}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(\ln|x-2|-\frac{\ln|x|}{2}-\frac{\ln|x+2|}{2}\right)\right)-\ln 4+\frac{\ln 6}{2}+\frac{\ln 8}{2} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x-2}{\sqrt{x\cdot(x+2)}}\right)+\frac{-2\cdot\ln 4+\ln 6+\ln 8}{2} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x\cdot(x+2)}}\right)+\frac{-4\cdot\ln 2+\ln 2+\ln 3+3\cdot\ln 2}{2} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}\right)+\frac{\ln 3}{2} = \ln 1+\frac{\ln 3}{2} = 0+\frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 3}{2}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 3}{2}$.

967. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{5}^{\infty} \frac{2x+3}{x^3-9x}\,dx$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{2x+3}{x^3-9x} = \frac{2x+3}{(x-3)\cdot x\cdot(x+3)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+3}\,,$$

$$2x+3 = A\cdot x\cdot(x+3)+B\cdot(x-3)\cdot(x+3)+C\cdot(x-3)\cdot x\,. \qquad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości ($\heartsuit$), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C.

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości ($\heartsuit$) kolejno $x=3$, $x=0$, $x=-3$ otrzymując odpowiednio

$$9=18A, \quad \text{skąd} \quad A=\frac{1}{2}\,,$$

$$3=-9B, \quad \text{skąd} \quad B=-\frac{1}{3}\,,$$

$$-3=18C, \quad \text{skąd} \quad C=-\frac{1}{6}\,.$$

Wobec tego

$$\int_{5}^{\infty} \frac{2x+3}{x^3-9x}\,dx = \int_{5}^{\infty} \frac{1/2}{x-3}-\frac{1/3}{x}-\frac{1/6}{x+3}\,dx = \frac{\ln|x-3|}{2}-\frac{\ln|x|}{3}-\frac{\ln|x+3|}{6}\Bigg|_{x=5}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln|x-3|}{2}-\frac{\ln|x|}{3}-\frac{\ln|x+3|}{6}\right)\right)-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 5}{3}+\frac{\ln 8}{6} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\ln\sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2\cdot(x+3)}}\right)-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 5}{3}+\frac{\ln 2}{2} = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2\cdot(x+3)}}\right)+\frac{\ln 5}{3} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt[6]{\frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^3}{1+\frac{3}{x}}}\right)+\frac{\ln 5}{3} = \ln 1+\frac{\ln 5}{3} = 0+\frac{\ln 5}{3} = \frac{\ln 5}{3}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 5}{3}$.

968. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{4}^{\infty} \frac{dx}{x\cdot(x+2)\cdot(x+5)}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\ln\frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami pierwszymi, a w liczbą wymierną dodatnią.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x\cdot(x+2)\cdot(x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+5}\,,$$

$$1=A\cdot(x+2)\cdot(x+5)+B\cdot x\cdot(x+5)+C\cdot x\cdot(x+2)\,.$$

Podstawiamy[2] za x wartości 0, -2 i -5 otrzymując odpowiednio

dla $x=0$ $\qquad 1=10\cdot A,$ skąd $A=1/10,$

dla $x=-2$ $\qquad 1=-6\cdot B,$ skąd $B=-1/6,$

dla $x=-5$ $\qquad 1=15\cdot C,$ skąd $C=1/15.$

Wobec tego[3]

$$\int_4^\infty \frac{dx}{x\cdot(x+2)\cdot(x+5)}=\int_4^\infty \frac{1/10}{x}-\frac{1/6}{x+2}+\frac{1/15}{x+5}\,dx=$$

$$=\frac{1}{30}\cdot(3\cdot\ln|x|-5\cdot\ln|x+2|+2\cdot\ln|x+5|)\Big|_{x=4}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{30}\cdot(3\cdot\ln|x|-5\cdot\ln|x+2|+2\cdot\ln|x+5|)\right)\right)-\frac{1}{30}\cdot(3\cdot\ln 4-5\cdot\ln 6+2\cdot\ln 9)=$$

$$=\frac{1}{30}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^3\cdot(x+5)^2}{(x+2)^5}\right)-\frac{1}{30}\cdot(6\cdot\ln 2-5\cdot\ln 2-5\cdot\ln 3+4\cdot\ln 3)=$$

$$=\frac{1}{30}\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{x}\right)^2}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^5}\right)-\frac{1}{30}\cdot(\ln 2-\ln 3)=\frac{1}{30}\cdot\ln 1+\frac{1}{30}\cdot(\ln 3-\ln 2)=\frac{1}{30}\cdot\ln\frac{3}{2}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\frac{1}{30}\cdot\ln\frac{3}{2}$.

Uwaga: Całki

$$\int_4^\infty \frac{1}{x}\,dx,\qquad \int_4^\infty \frac{1}{x+2}\,dx,\qquad \int_4^\infty \frac{1}{x+5}\,dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty}\ln|x|,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln|x+2|,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln|x+5|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

[2]Można też wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

[3]Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartości całek zbieżnych.

969. $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\cdot \ln x} =$ **Rozbieżna**

970. $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\cdot (\ln x)^2} = \mathbf{\frac{1}{\ln 2}}$

971. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\cdot \ln x} =$ **Rozbieżna**

972. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\cdot (\ln x)^2} = \mathbf{\frac{1}{\ln 2}}$

973. $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\cdot (\ln x)^{1001/1000}} = \mathbf{\frac{1000}{\sqrt[1000]{\ln 2}}}$

974. $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x\cdot \ln x \cdot \ln\ln x} =$ **Rozbieżna**

975. $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x\cdot \ln x\cdot (\ln\ln x)^2} = \mathbf{\frac{1}{\ln\ln 3}}$

976. $\int\limits_0^\infty \sqrt{x+1}-\sqrt{x}\,dx =$ **Rozbieżna**

977. $\int\limits_0^\infty x^8\cdot \sin x^9\,dx =$ **Rozbieżna**

978. $\int\limits_0^{32} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \mathbf{20}$

979. $\int\limits_0^1 \ln x\,dx = \mathbf{-1}$

980. $\int\limits_1^\infty \sqrt[x]{x}\,dx =$ **Rozbieżna**

981. $\int\limits_{-1}^1 x^{-43/45}\,dx = \mathbf{0}$

982. $\int\limits_{-1}^1 x^{-47/45}\,dx =$ **Rozbieżna**

983. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^{99}}{x^{100}+x^{66}+x^{44}+1}\,dx =$ **Rozbieżna**

984. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^{97}}{x^{100}+x^{66}+x^{44}+1}\,dx = \mathbf{0}$

985. Obliczyć pole powierzchni obrotowej (torusa) powstałej przez obrót okręgu o równaniu
$$(x-2)^2+y^2=1$$
wokół osi OY.

Pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $\{(x,\,f(x)) : x\in[a,\,b]\}$, gdzie $0\leqslant a<b$ oraz $f\in C^1([a,\,b])$, wokół osi OY jest równe
$$2\pi\cdot\int\limits_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$
W rozwiązaniu może się też przydać wzór $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$.

Rozwiązanie:

Przekształcanie równania obracanego okręgu prowadzi kolejno do:
$$y^2=1-(x-2)^2\,,$$
$$y=\pm\sqrt{1-(x-2)^2}\,.$$
Przy tym x może przebiegać przedział $[1,\,3]$.

Okrąg rozdziela się więc w naturalny sposób na dwa półokręgi, o równaniach
$$y=\sqrt{1-(x-2)^2} \quad \text{oraz} \quad y=-\sqrt{1-(x-2)^2}\,.$$

Ponieważ każdy z tych półokręgów tworzy przy obrocie powierzchnię obrotową o takim samym polu, możemy wyliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót jednego z nich, a otrzymany wynik pomnożyć przez 2.

Aby skorzystać z podanego wzoru, przyjmujemy $[a,b]=[1,3]$ i $f(x)=\sqrt{1-(x-2)^2}$. Wówczas

$$f'(x)=\frac{-(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,.$$

Zatem szukane pole jest równe

$$2\cdot 2\pi\cdot\int_1^3 x\cdot\sqrt{1+\frac{(x-2)^2}{1-(x-2)^2}}\,dx\,.$$

Obliczamy je wykonując podstawienie $t=x-2$:

$$2\cdot 2\pi\cdot\int_1^3 x\cdot\sqrt{1+\frac{(x-2)^2}{1-(x-2)^2}}\,dx=4\pi\cdot\int_{-1}^1 (t+2)\cdot\sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\,dt=4\pi\cdot\int_{-1}^1 (t+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=$$

$$=4\pi\cdot\int_{-1}^1 t\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt+8\pi\cdot\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\,.$$

Ponieważ pierwsza całka w ostatniej sumie jest równa 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera[4], kontynuujemy obliczanie drugiej całki[5]:

$$8\pi\cdot\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=8\pi\cdot\arcsin t\,\Big|_{t=-1}^{1}=8\pi\cdot(\arcsin 1-\arcsin(-1))=8\pi\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right)=8\pi^2\,.$$

Odpowiedź: Pole torusa jest równe $8\pi^2$.

Uwaga: Nieprzypadkowo pole torusa jest iloczynem długości obracanego okręgu przez drogę zakreślaną przy obrocie przez środek (czyli środek ciężkości) tego okręgu (twierdzenie Pappusa-Guldina).

Niech $C(n)=\int_0^\infty\frac{x^n\,dx}{x^{22}+x^{11}+1}$. Dla danego n podaj takie $k\neq n$, że $C(k)=C(n)$.

992. $n=2$, $k=\mathbf{18}$

993. $n=3$, $k=\mathbf{17}$

994. $n=5$, $k=\mathbf{15}$

995. $n=7$, $k=\mathbf{13}$

Niech $C(n)=\int_0^\infty\frac{x^n\,dx}{(x^{13}+1)^3}$. Dla danego n podaj taką liczbę $k\neq n$, że $C(k)=C(n)$.

996. $n=5$, $k=\mathbf{32}$

997. $n=7$, $k=\mathbf{30}$

998. $n=11$, $k=\mathbf{26}$

999. $n=13$, $k=\mathbf{24}$

[4]Ponieważ jest to całka niewłaściwa, trzeba udowodnić jej zbieżność, najlepiej korzystając z kryterium porównawczego.

[5]Druga całka też jest niewłaściwa, ale tu akurat nie wpływa to na tok rachunków.