

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 11.04.2024.

Zadania podobne do zadań wcześniejszych można pominąć,
jeśli nie sprawiają trudności.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Całki niewłaściwe.

Początkowe 10 zadań jest przeznaczonych do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

959. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}}.$$

960. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}.$$

961. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx.$$

962. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx$$

jest zbieżna.

963. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^{\infty} \frac{5x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 1.

964. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{16x^3 + x}.$$

Doprowadzić wynik do postaci $\ln w$, gdzie w liczbą wymierną dodatnią.

965. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3 + x}$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

966. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_6^{\infty} \frac{3x+2}{x^3-4x} dx$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

967. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_5^{\infty} \frac{2x+3}{x^3-9x} dx$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

968. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+2) \cdot (x+5)}.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \ln \frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami pierwszymi, a w liczbą wymierną dodatnią.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartości całek zbieżnych.

969. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \dots\dots\dots$

970. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2} = \dots\dots\dots$

971. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \dots\dots\dots$

972. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2} = \dots\dots\dots$

973. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^{1001/1000}} = \dots\dots\dots$

974. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x} = \dots\dots\dots$

975. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot (\ln \ln x)^2} = \dots\dots\dots$

976. $\int_0^{\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} dx = \dots\dots\dots$

$$977. \int_0^{\infty} x^8 \cdot \sin x^9 dx = \dots\dots\dots$$

$$978. \int_0^{32} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \dots\dots\dots$$

$$979. \int_0^1 \ln x dx = \dots\dots\dots$$

$$980. \int_1^{\infty} \sqrt[3]{x} dx = \dots\dots\dots$$

$$981. \int_{-1}^1 x^{-43/45} dx = \dots\dots\dots$$

$$982. \int_{-1}^1 x^{-47/45} dx = \dots\dots\dots$$

$$983. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{99}}{x^{100} + x^{66} + x^{44} + 1} dx = \dots\dots\dots$$

$$984. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{97}}{x^{100} + x^{66} + x^{44} + 1} dx = \dots\dots\dots$$

985. Obliczyć pole powierzchni obrotowej (torusa) powstałej przez obrót okręgu o równaniu

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

wokół osi OY .

Pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$, gdzie $0 \leq a < b$ oraz $f \in C^1([a, b])$, wokół osi OY jest równe

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

W rozwiązaniu może się też przydać wzór $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$.

986. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^8 + x^7}} dx$$

jest zbieżna.

987. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{24}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+3) \cdot (x+8)}.$$

988. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{15}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+10) \cdot (x+12) \cdot (x+30)}.$$

989. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x+3) \cdot (5x+3)}.$$

990. Rozważamy bryłę

$$\left\{ (x, y, z) : x \geq 1 \wedge \sqrt{y^2 + z^2} \leq \frac{1}{x} \right\}.$$

Rozstrzygnąć, czy ta bryła ma skończoną objętość oraz czy powierzchnia ją ograniczająca ma skończone pole¹.

991. Rozważamy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^x}{t^{10} + 1} dt.$$

- Wyznaczyć dziedzinę funkcji f .
- Dowieść, że f jest funkcją wypukłą.
- Dowieść, że wykres funkcji f jest symetryczny względem pewnej prostej pionowej.
- Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji f .

Wskazówki:

- Wykonać podstawienie $s = 1/t$.
- Udowodnić nierówność między średnimi ważonymi (doprecyzować założenia):

$$a^w \cdot b^{1-w} \leq wa + (1-w)b.$$

Zastosować ją do funkcji podcałkowych.

Niech $C(n) = \int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{x^{22} + x^{11} + 1}$. Dla danego n podaj takie $k \neq n$, że $C(k) = C(n)$.

992. $n = 2$, $k = \dots$

993. $n = 3$, $k = \dots$

994. $n = 5$, $k = \dots$

995. $n = 7$, $k = \dots$

Niech $C(n) = \int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{(x^{13} + 1)^3}$. Dla danego n podaj taką liczbę $k \neq n$, że $C(k) = C(n)$.

996. $n = 5$, $k = \dots$

997. $n = 7$, $k = \dots$

998. $n = 11$, $k = \dots$

999. $n = 13$, $k = \dots$

¹Innymi słowy: Czy mając pokój w takim właśnie kształcie (tzw. patodeweloperka) można go pomalować skończoną ilością farby? Czy można go wypełnić skończoną ilością farby?