

914. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 x^3 dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

Rozwiązanie:

Dla funkcji określonej na przedziale $[0, 1]$ wzór z wersji 4 przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Wobec tego¹

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^n k^3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{4}.$$

915. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

Rozwiązanie:

Najpierw pokażę, w jaki sposób można naiwnie próbować rozwiązać to zadanie i dlaczego to się nie udaje.

Dla funkcji ciągłej $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ i ciągu podziałów przedziału na równe części, interesujący nas wzór ogólny przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Wobec tego

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \right).$$

¹Korzystamy po drodze ze wzoru $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

Trudnością, jaką napotykamy w tym momencie, jest brak wzoru, który pozwoliłby wyrazić sumę

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$$

w prostej postaci pozwalającej na przejście graniczne.

No cóż, naiwnie sądziliśmy, że najłatwiej będzie wybrać możliwie najprostszy ciąg podziałów przedziału całkowania, a mianowicie podziały na równe części. Ale co nam z tego, że sam podział jest ładny, skoro funkcja podcałkowa w punktach podziału przyjmuje wartości wykluczające zwinięcie otrzymanej sumy do prostej postaci.

Musimy więc zmienić nasze priorytety. Nieważne, czy przedziałiki podziału są równe, czy nie. Przede wszystkim wartości funkcji podcałkowej w punktach podziału muszą być możliwie najprostsze. Ponieważ w rozważanym przykładzie funkcją podcałkową jest pierwiastek kwadratowy, punktami podziału powinny być liczby, których pierwiastki kwadratowe są liczbami wymiernymi, a jeszcze lepiej, jeśli nie będą to byle jakie liczby wymierne chaotycznie rozmieszczone, ale liczby wymierne tworzące w miarę regularny ciąg², na przykład ciąg arytmetyczny.

To prowadzi do pomysłu, aby za punkty n -tego podziału przyjąć kwadraty liczb wymiernych tworzących skończony ciąg arytmetyczny. Oczywiście taki, aby zerowy punkt podziału był lewym, a n -ty prawym końcem przedziału całkowania, czyli

$$x_{n,k} = \frac{k^2}{n^2}.$$

Zastosowanie ma wersja z ciągiem podziałów, gdzie n -ty podział jest podziałem na n niekoniecznie równych części, a y -ki są w prawych końcach przedziałów podziału:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left((x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(x_{n,k}) \right). \quad (\clubsuit)$$

W naszym wypadku

$$a = 0, \quad b = 1, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad x_{n,k} = \frac{k^2}{n^2},$$

skąd po podstawieniu powyższych danych do wzoru (\clubsuit) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{k^2}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{2k-1}{n^2} \right) \cdot \frac{k}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^n (2k^2 - k) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} \cdot \left(2 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{3} - \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1) \cdot (2n+1)}{3n^2} - \frac{n+1}{2n^2} \right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

²Tu mamy na myśli ciąg skończony, ale słowo "skończony" pomijamy, aby nie zaburzać płynności i tak już rozbudowanego zdania.

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{3}.$$

916. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 2^x dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

Rozwiązanie:

Dla funkcji określonej na przedziale $[0, 1]$ wzór z wersji 4 przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Wobec tego³

$$\begin{aligned} \int_0^1 2^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n 2^{k/n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot 2^{1/n} \cdot \frac{(2^{1/n})^n - 1}{2^{1/n} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot 2^{1/n} \cdot \frac{2 - 1}{2^{1/n} - 1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2^{1/n}}{2^{1/n} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{1/n} \cdot \frac{1/n}{2^{1/n} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1} = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1}. \end{aligned}$$

Jeżeli istnieje granica (funkcji)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2^x - 1},$$

to istnieje również granica (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1}$$

i są one równe. Korzystając z reguły de l'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^x \cdot \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

i tyle właśnie wynosi wartość szukanej całki.

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

³Korzystamy po drodze ze wzoru na sumę postępu geometrycznego.

917. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{(k/n)^3}{5(k/n)^4 + 1} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \frac{x^3}{5x^4 + 1}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^3}{5x^4 + 1} dx = \frac{1}{20} \cdot \int_0^2 \frac{20x^3}{5x^4 + 1} dx = \\ &= \frac{\ln(5x^4 + 1)}{20} \Big|_{x=0}^2 = \frac{\ln 81 - \ln 1}{20} = \frac{4 \ln 3}{20} = \frac{\ln 3}{5}, \end{aligned}$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy ze wzoru

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C.$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4} = \frac{\ln 3}{5}.$$

918. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{ \left(x, \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \right) : x \in [0, 15] \right\}.$$

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2}$ na przedziale $[a, b] = [0, 15]$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= \int_0^{15} \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx = \int_0^{15} \sqrt{1 + x} dx = \frac{2 \cdot (x+1)^{3/2}}{3} \Big|_{x=0}^{15} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot (64 - 1) = \frac{2}{3} \cdot 63 = 42. \end{aligned}$$

Odpowiedź:

Dana w zadaniu krzywa ma długość 42.

919. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$f(x) \leq g(x)$$

dla każdego $x \in [a, b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X = \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx, \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx, \quad P = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego parabolą o równaniu $y = x^2$ i prostą o równaniu $y = x$.

Rozwiązanie:

Ponieważ dane w zadaniu parabola i prosta przecinają się w punktach $(0, 0)$ i $(1, 1)$, a przy tym $x^2 \leq x$ dla $x \in [0, 1]$, przeprowadzamy obliczenia dla $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = x$. Otrzymujemy kolejno:

$$X = \int_0^1 x \cdot (x - x^2) dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 - x^4 dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{1}{15},$$

$$P = \int_0^1 x - x^2 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości danej figury to $X/P = (1/12)/(1/6) = 1/2$ oraz $Y/P = (1/15)/(1/6) = (2/5)$.

Odpowiedź:

Środek ciężkości danej figury leży w punkcie $(1/2, 2/5)$.

920. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq \frac{1}{3} \right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Rozwiązanie:

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{ (x, y) : \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie $(x_s, 0, 0)$, gdzie

$$x_s = \frac{\pi \cdot \int_{1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx}{\pi \cdot \int_{1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx}.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} \int_{1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx &= \int_{1/3}^1 x - x^3 dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right|_{x=1/3}^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{18} + \frac{1}{324} = \frac{162 - 81 - 18 + 1}{324} = \frac{64}{324} = \frac{16}{81} \end{aligned}$$

oraz

$$\int_{1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{1/3}^1 1 - x^2 dx = \left. x - \frac{x^3}{3} \right|_{x=1/3}^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{81} = \frac{81 - 27 - 27 + 1}{81} = \frac{28}{81},$$

skąd

$$x_s = \frac{16/81}{28/81} = \frac{4}{7}.$$

Odpowiedź: Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie $\left(\frac{4}{7}, 0, 0\right)$.

W każdym z kolejnych dwunastu zadań podaj w postaci uproszczonej wartość granicy ciągu.

$$921. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+k} + \dots + \frac{1}{6n} \right) = \ln 3$$

$$922. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+6} + \dots + \frac{1}{n+2k} + \dots + \frac{1}{9n} \right) = \ln 3$$

$$923. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+8} + \frac{1}{n+12} + \dots + \frac{1}{n+4k} + \dots + \frac{1}{81n} \right) = \ln 3$$

$$924. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2 + (n+1)^2} + \frac{n+2}{n^2 + (n+2)^2} + \dots + \frac{k}{n^2 + k^2} + \dots + \frac{7n}{50n^2} \right) = \ln 5$$

$$925. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n^2 + (n+1)^2} + \frac{n+2}{2n^2 + (n+2)^2} + \dots + \frac{k}{2n^2 + k^2} + \dots + \frac{5n}{27n^2} \right) = \ln 3$$

$$926. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3n^2 + 1} + \frac{2}{3n^2 + 4} + \dots + \frac{k}{3n^2 + k^2} + \dots + \frac{3n}{12n^2} \right) = \ln 2$$

$$927. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$928. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{4n^2} \right) = \frac{\pi}{6 \cdot \sqrt{3}} \quad \left(= \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{18} \right)$$

$$929. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \frac{\pi}{3 \cdot \sqrt{3}} \quad \left(= \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{9} \right)$$

$$930. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{3n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \frac{\pi}{6 \cdot \sqrt{3}}$$

$$931. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \dots + n^{20}}{n^{21}} = 1/21$$

$$932. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2} + \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \frac{n}{(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2} \right) = 1/2$$

943. Pomarańczę o cienkiej skórce pokrojono na plasterki równej grubości. Które plasterki mają więcej skórki: te bliżej równika, czy te bliżej biegunów?

Odpowiedź: Wszystkie plastry zawierają tyle samo skórki.

944. Dane są dwie sfery o różnych promieniach. Dysponujemy cyrklem o stałym rozwarciu mniejszym od promienia mniejszej sfery. Na każdej ze sfer rysujemy tym cyrklem okrąg. Na której sferze narysowany okrąg ogranicza większe pole?

Odpowiedź: Pole ograniczone okręgiem nie zależy od promienia sfery, a jedynie od rozwarcia cyrkla użytego do narysowania okręgu. Takie samo jest pole koła narysowanego na płaszczyźnie. Pole całej sfery jest równe połui koła o promieniu równym średnicy sfery – na sferze rysujemy to tak: nóżka cyrkla w jednym biegunie, ołówek ślizga się po drugim biegunie. Natomiast półsfera powstaje przez umieszczenie nóżki na biegunie i narysowanie równika – zastanów się jaki jest wówczas rozstaw cyrkla i sprawdź, że pole się zgadza.

945. Gdzie leży środek ciężkości półsfery?

Odpowiedź: W połowie wysokości.

946. Gdzie leży środek ciężkości półkuli?

Odpowiedź: W 3/8 wysokości.

949. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n-3} + \sqrt{n-2} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n})^k}{(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5} + \dots + \sqrt[3]{n-3} + \sqrt[3]{n-2} + \sqrt[3]{n-1} + \sqrt[3]{n})^m}$$

dla tak dobranych względnie pierwszych liczb naturalnych k i m , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Rozwiązanie:

Oczekujemy, że suma występująca w liczniku jest rzędu wielkości $n^{3/2}$, gdyż mamy tam n składników, a większość z nich jest rzędu $n^{1/2}$.

Zauważmy, że

$$n^{-3/2} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \sqrt{x}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału $[0, 1]$ na n przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{3}.$$

Analogicznie oczekujemy, że suma występująca w mianowniku jest rzędu wielkości $n^{4/3}$, gdyż mamy tam n składników, a większość z nich jest rzędu $n^{1/3}$.

Zauważmy, że

$$n^{-4/3} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ponieważ funkcja g jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału $[0, 1]$ na n przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3x^{4/3}}{4} \Big|_{x=0}^1 = \frac{3}{4}.$$

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i}\right)^k}{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{i}\right)^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{3k/2 - 4m/3} \cdot \frac{\left(n^{-3/2} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{i}\right)^k}{\left(n^{-4/3} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{i}\right)^m} \right) = \frac{(2/3)^k}{(3/4)^m},$$

o ile $3k/2 = 4m/3$, czyli $k = 8$ i $m = 9$.

Dla tych wartości k i m szukana granica jest równa

$$\frac{2^8 \cdot 4^9}{3^8 \cdot 3^9} = \frac{2^{26}}{3^{17}}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ciągu jest równa $2^{26}/3^{17}$ dla $k = 8$ i $m = 9$.

950. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$f(x) \leq g(x)$$

dla każdego $x \in [a, b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X = \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx, \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx, \quad P = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Wyznaczyć środek ciężkości (x_n, y_n) obszaru Z_n ograniczonego prostą o równaniu $y = x$ i krzywą o równaniu $y = |x| \cdot \sqrt[n]{|x|}$.

Obliczyć graniczne wartości $x_G = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oraz $y_G = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Jakiej zależności między x_G i y_G powinniśmy oczekiwać i dlaczego?

Rozwiązanie:

Ponieważ dane w zadaniu krzywa i prosta przecinają się w punktach $(0, 0)$ i $(1, 1)$, a przy tym $|x| \cdot \sqrt[n]{|x|} \leq x$ dla $x \in [0, 1]$, przeprowadzamy obliczenia dla $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = x^{(n+1)/n}$ oraz $g(x) = x$. Otrzymujemy kolejno:

$$X = \int_0^1 x \cdot (x - x^{(n+1)/n}) dx = \int_0^1 x^2 - x^{(2n+1)/n} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{(3n+1)/n}}{(3n+1)/n} \Bigg|_{x=0}^1 = \frac{1}{3} - \frac{n}{3n+1} =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot (3n+1)},$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 - x^{2(n+1)/n} dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^{(3n+2)/n}}{2 \cdot (3n+2)/n} \Bigg|_{x=0}^1 = \frac{1}{6} - \frac{n}{2 \cdot (3n+2)} = \frac{1}{3 \cdot (3n+2)},$$

$$P = \int_0^1 x - x^{(n+1)/n} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{(2n+1)/n}}{(2n+1)/n} \Bigg|_{x=0}^1 = \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2 \cdot (2n+1)}.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości figury Z_n to

$$x_n = \frac{X}{P} = \frac{2 \cdot (2n+1)}{3 \cdot (3n+1)} \quad \text{oraz} \quad y_n = \frac{Y}{P} = \frac{2 \cdot (2n+1)}{3 \cdot (3n+2)}.$$

Wobec tego $x_G = y_G = 4/9$.

Dla bardzo dużych n obszar Z_n jest nieznacznie pogrubionym odcinkiem o końcach $(0, 0)$ i $(1, 1)$, więc należy oczekiwać, że jego środek ciężkości leży bardzo blisko tego odcinka. W konsekwencji **należy oczekiwać, że $x_G = y_G$** .

951. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq -\frac{1}{3} \right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Rozwiązanie:

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{ (x, y) : -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie $(x_s, 0, 0)$, gdzie

$$x_s = \frac{\pi \cdot \int_{-1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx}{\pi \cdot \int_{-1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx}.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} \int_{-1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx &= \int_{-1/3}^1 x - x^3 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_{x=-1/3}^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{18} + \frac{1}{324} = \frac{162 - 81 - 18 + 1}{324} = \frac{64}{324} = \frac{16}{81} \end{aligned}$$

oraz

$$\int_{-1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{-1/3}^1 1 - x^2 dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-1/3}^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{81} = \frac{81 - 27 + 27 - 1}{81} = \frac{80}{81},$$

skąd

$$x_s = \frac{16/81}{80/81} = \frac{1}{5}.$$

Odpowiedź: Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie $\left(\frac{1}{5}, 0, 0\right)$.

952. Obliczyć długość krzywej

$$\{(x, x^{3/2}) : x \in [0, 13]\}.$$

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = x^{3/2}$ na przedziale $[a, b] = [0, 13]$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= \int_0^{13} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^{13} \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot x} dx = \frac{8 \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot x + 1\right)^{3/2}}{27} \Big|_{x=0}^{13} = \\ &= \frac{8}{27} \cdot \left(\left(\frac{9 \cdot 13 + 4}{4}\right)^{3/2} - 1 \right) = \frac{8}{27} \cdot \left(\left(\frac{117 + 4}{4}\right)^{3/2} - 1 \right) = \frac{8}{27} \cdot \left(\left(\frac{121}{4}\right)^{3/2} - 1 \right) = \\ &= \frac{8}{27} \cdot \left(\frac{1331}{8} - 1 \right) = \frac{1331 - 8}{27} = \frac{1323}{27} = \frac{1350 - 27}{27} = \frac{\frac{2700}{2} - 27}{27} = \frac{100}{2} - 1 = 49. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu krzywa ma długość 49.