Kolokwium nr 4: środa 10.04.2024, godz. 14:15–15:45, materiał zad. 738–958.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartki 28.03 i 4.04.2024.

Zadania podobne do zadań wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Całka Riemanna i zastosowania całki oznaczonej.

Początkowe dwa zadania zostały omówione na wykładzie.

Kolejnych pięć zadań jest przeznaczonych do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

914. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 x^3\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

915. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

---

916. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 2^x\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

917. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^3}{5k^4+n^4}\,.$$

918. Obliczyć długość krzywej
$$\left\{\left(x,\,\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\right):\ x\in[0,\,15]\right\}.$$

919. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f,\,g:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ spełniają nierówność
$$f(x)\leqslant g(x)$$
dla każdego $x\in[a,\,b]$, to środek ciężkości figury
$$\{(x,\,y):\ x\in[a,\,b]\ \wedge\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$$
leży w punkcie $\left(\frac{X}{P},\,\frac{Y}{P}\right)$, gdzie
$$X=\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx\,,\qquad Y=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b (g(x))^2-(f(x))^2\,dx\,,\qquad P=\int_a^b g(x)-f(x)\,dx\,.$$
Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego parabolą o równaniu $y=x^2$ i prostą o równaniu $y=x$.

920. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli
$$\left\{(x,\,y,\,z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\ \wedge\ x\geqslant\frac{1}{3}\right\}.$$
Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

W każdym z kolejnych dwunastu zadań podaj **w postaci uproszczonej** wartość granicy ciągu.

921. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+k}+\ldots+\frac{1}{6n}\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

922. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+6}+\ldots+\frac{1}{n+2k}+\ldots+\frac{1}{9n}\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

923. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+8}+\frac{1}{n+12}+\ldots+\frac{1}{n+4k}+\ldots+\frac{1}{81n}\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

924. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+(n+1)^2}+\frac{n+2}{n^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{k}{n^2+k^2}+\ldots+\frac{7n}{50n^2}\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

925. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n^2+(n+1)^2}+\frac{n+2}{2n^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{k}{2n^2+k^2}+\ldots+\frac{5n}{27n^2}\right)=\ldots\ldots\ldots$

926. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n^2+1}+\frac{2}{3n^2+4}+\ldots+\frac{k}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{3n}{12n^2}\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

927. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\ldots+\frac{n}{n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{2n^2}\right)=$ ....

928. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+1}+\frac{n}{3n^2+4}+\ldots+\frac{n}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{4n^2}\right)=$ ....

929. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+1}+\frac{n}{3n^2+4}+\ldots+\frac{n}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{12n^2}\right)=$ ....

930. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+(n+1)^2}+\frac{n}{3n^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{12n^2}\right)=$ ....

931. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^{20}+2^{20}+3^{20}+\ldots+n^{20}}{n^{21}}=$ ....

932. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\frac{n}{(n+3)^2}+\ldots+\frac{n}{(2n)^2}\right)=$ ....

933. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

934. Obliczyć całkę

$$\int_1^3 x^{44}\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

935. Obliczyć całkę

$$\int_1^2 3^x\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

936. Obliczyć długość krzywej
$$\left\{\left(x, \frac{e^x+e^{-x}}{2}\right):\ x\in[0,1]\right\}.$$

937. Obliczyć pole powierzchni fragmentu paraboloidy obrotowej
$$\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2=z\leqslant 1\right\}.$$

938. Obliczyć objętość bryły
$$\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\right\}$$
i wyznaczyć położenie jej środka ciężkości.

939. Obliczyć objętość bryły
$$\left\{(x,y,z):\ x^4+y^4+2x^2y^2\leqslant z\leqslant 1\right\}$$
i wyznaczyć położenie jej środka ciężkości.

940. Dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ wyznaczyć środek ciężkości (x_n, y_n) obszaru Z_n ograniczonego prostą o równaniu $y=x$ i krzywą o równaniu $y=|x|^n$.

Obliczyć graniczne wartości $x_G=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ oraz $y_G=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Jakich wartości x_G i y_G powinniśmy oczekiwać i dlaczego?

941. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n}\cdot\left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\ldots+\sqrt[3]{2n}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}.$$

942. Obliczyć objętość torusa powstałego przez obrót koła
$$\left\{(x,y):\ (x-5)^2+y^2\leqslant 9\right\}$$
wokół osi OY.

943. Pomarańczę o cienkiej skórce pokrojono na plasterki równej grubości. Które plasterki mają więcej skórki: te bliżej równika, czy te bliżej biegunów?

944. Dane są dwie sfery o różnych promieniach. Dysponujemy cyrklem o stałym rozwarciu mniejszym od promienia mniejszej sfery. Na każdej ze sfer rysujemy tym cyrklem okrąg. Na której sferze narysowany okrąg ogranicza większe pole?

945. Gdzie leży środek ciężkości półsfery?

946. Gdzie leży środek ciężkości półkuli?

947. Pasem przestrzennym o szerokości d nazywamy obszar przestrzeni zawarty pomiędzy dwiema płaszczyznami równoległymi odległymi o d, wraz z tymi płaszczyznami.

Czy sferę można pokryć pasami przestrzennymi o sumie szerokości mniejszej od średnicy sfery?

Pasów ma być skończenie wiele.

948. Pasem o szerokości d nazywamy obszar płaszczyzny zawarty pomiędzy dwiema prostymi równoległymi odległymi o d, wraz z tymi prostymi.

Czy koło można pokryć pasami o sumie szerokości mniejszej od średnicy koła?

Pasów ma być skończenie wiele.

Wskazówka: Skorzystać z poprzedniego zadania.

949. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-3}+\sqrt{n-2}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)^k}{\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}+\ldots+\sqrt[3]{n-3}+\sqrt[3]{n-2}+\sqrt[3]{n-1}+\sqrt[3]{n}\right)^m}$$

dla tak dobranych względnie pierwszych liczb naturalnych k i m, aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

950. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$f(x)\leqslant g(x)$$

dla każdego $x\in[a,b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x,y):\ x\in[a,b]\ \wedge\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P},\frac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X=\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx\,,\qquad Y=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b (g(x))^2-(f(x))^2\,dx\,,\qquad P=\int_a^b g(x)-f(x)\,dx\,.$$

Wyznaczyć środek ciężkości (x_n,y_n) obszaru Z_n ograniczonego prostą o równaniu $y=x$ i krzywą o równaniu $y=|x|\cdot\sqrt[n]{|x|}$.

Obliczyć graniczne wartości $x_G=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ oraz $y_G=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. Jakiej zależności między x_G i y_G powinniśmy oczekiwać i dlaczego?

951. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\ \wedge\ x\geqslant-\frac{1}{3}\right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

952. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{\left(x,x^{3/2}\right):\ x\in[0,13]\right\}.$$

953. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n^2}+\frac{n}{2(n+1)^2}+\frac{n}{2(n+2)^2}+\frac{n}{2(n+3)^2}+\ldots+\frac{n}{50n^2}\right).$$

954. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n^2}+\frac{n}{n^2+(n+1)^2}+\frac{n}{n^2+(n+2)^2}+\frac{n}{n^2+(n+3)^2}+\ldots+\frac{n}{50n^2}\right).$$

Dla podanych a, b, f obliczyć **jako granicę ciągu sum całkowych Riemanna** pole figury

$$\{(x,y):\ a\leqslant x\leqslant b\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}\,,$$

czyli całkę oznaczoną

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Wykorzystać podany ciąg podziałów $\left((x_{n,k})_{k=0}^{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ przedziału $[a,b]$.

Następnie sprawdzić otrzymany wynik przez bezpośrednie całkowanie.

Potrzebny wzorek:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big((x_{n,k}-x_{n,k-1})\cdot f(x_{n,k})\Big)\,.$$

955. $a=1,\quad b=e,\quad f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\quad x_{n,k}=e^{k/n}.$

956. $a=1,\quad b=2,\quad f(x)=\dfrac{1}{x},\quad x_{n,k}=2^{k/n}.$

957. $a=1,\quad b=8,\quad f(x)=\sqrt[3]{x},\quad x_{n,k}=\dfrac{(n+k)^3}{n^3}.$

958. $a=1,\quad b=8,\quad f(x)=\sqrt[3]{x},\quad x_{n,k}=8^{k/n}.$

Całka oznaczona jako granica ciągu sum Riemanna – przydatne wzory.

Założenia: Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna.
Do tego dany jest ciąg podziałów przedziału $[a,b]$. W tym ciągu n-tym wyrazem jest podział $(x_{n,0},x_{n,1},x_{n,2},\ldots,x_{n,m_n-1},x_{n,m_n})$, który jest podziałem na m_n przedzialików. I tak $x_{n,k}$ oznacza k-ty punkt n-tego podziału. Zakładamy, że średnice podziałów dążą do 0:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant m_n}(x_{n,k}-x_{n,k-1})=0\,.$$

I do tego jeszcze z każdego przedzialiku każdego podziału wybieramy dowolnie jeden punkt, a dokładniej z przedzialiku $[x_{n,k-1},x_{n,k}]$ wybieramy punkt $y_{n,k}$.

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\Big((x_{n,k}-x_{n,k-1})\cdot f(y_{n,k})\Big)=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Przypadek szczególny: n-ty podział na n części (niekoniecznie równych), y-ki w prawych końcach.

Założenia: Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna.
Do tego dany jest ciąg podziałów przedziału $[a,b]$. W tym ciągu n-tym wyrazem jest podział $(x_{n,0},x_{n,1},x_{n,2},\ldots,x_{n,n-1},x_{n,n})$, który jest podziałem na n przedzialików. I tak $x_{n,k}$ oznacza k-ty punkt n-tego podziału. Zakładamy, że średnice podziałów dążą do 0:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}(x_{n,k}-x_{n,k-1})=0\,.$$

Jako punkt z przedzialiku $[x_{n,k-1},x_{n,k}]$ wybieramy punkt $y_{n,k}=x_{n,k}$.

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big((x_{n,k}-x_{n,k-1})\cdot f(x_{n,k})\Big)=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Przypadek szczególny: n-ty podział jest podziałem na n równych przedziałów, y-ki są prawymi końcami.

Założenia: Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna.
Przyjmujemy, że n-ty podział przedziału $[a,b]$ składa się z punktów

$$x_{n,k}=a+k\cdot\frac{b-a}{n}$$

oraz że są one jednocześnie y-kami wybranymi do obliczania wartości funkcji f:

$$y_{n,k}=x_{n,k}=a+k\cdot\frac{b-a}{n}\,.$$

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\cdot f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Wzory na długości, pola, objętości i środki ciężkości

Musisz znać wzory $(*)$. Pozostałe wzory, czyli (???), musisz umieć rozpoznać w poniższym spisie i umieć je zastosować.

$$P=\int_a^b g(x)-f(x)\,dx \tag{$*$}$$

$$\left(\frac{\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx}{\int_a^b g(x)-f(x)\,dx},\ \frac{\frac{1}{2}\cdot\int_a^b (g(x))^2-(f(x))^2\,dx}{\int_a^b g(x)-f(x)\,dx}\right) \tag{???}$$

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \tag{$*$}$$

$$\left(\frac{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx},\ \frac{\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}\right) \tag{???}$$

$$V_{OX}=\pi\cdot\int_a^b g^2(x)-f^2(x)\,dx \qquad x_s=\frac{\int_a^b x\cdot(g^2(x)-f^2(x))\,dx}{\int_a^b g^2(x)-f^2(x)\,dx} \tag{???}$$

$$V_{OY}=2\pi\cdot\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx \qquad y_s=\frac{\int_a^b x\cdot(g^2(x)-f^2(x))\,dx}{2\cdot\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx} \tag{???}$$

$$P_{OX}=2\pi\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad x_s=\frac{\int_a^b x\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx} \tag{???}$$

$$P_{OY}=2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad y_s=\frac{\int_a^b x\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx} \tag{???}$$