W każdym z poniższych 35 zadań podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

Wskazówka: W niektórych zadaniach lepiej nie całkować bezpośrednio, tylko narysować odpowiednią figurę i obliczyć jej pole.

829. $\int\limits_{2020}^{2024} 7\,dx = \mathbf{28}$

830. $\int\limits_{0}^{3} x^2\,dx = \mathbf{9}$

831. $\int\limits_{0}^{2} x^3\,dx = \mathbf{4}$

832. $\int\limits_{0}^{1} x^{10}\,dx = \mathbf{1/11}$

833. $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx = \mathbf{14/3}$

834. $\int\limits_{1}^{27} \sqrt[3]{x}\,dx = \mathbf{60}$

835. $\int\limits_{-2}^{10} |x|\,dx = \mathbf{52}$

836. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x} = \mathbf{\ln 3}$

837. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x+1} = \mathbf{\ln 2}$

838. $\int\limits_{1}^{7} \frac{dx}{x+2} = \mathbf{\ln 3}$

839. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

840. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

841. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

842. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

843. $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

844. $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

845. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

846. $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

847. $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{2\pi}$

848. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi}$

849. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi}$

850. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{2-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}}$

851. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}}$

852. $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{12-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}+2\pi}$

853. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}}$

854. $\int\limits_{0}^{6} \sqrt{12x-x^2}\,dx = \boldsymbol{9\pi}$

855. $\int\limits_{10}^{20} \sqrt{20x-x^2}\,dx = \boldsymbol{25\pi}$

856. $\int\limits_{0}^{6} \sqrt{6x-x^2}\,dx = \boldsymbol{9\pi/2}$

857. $\int\limits_{0}^{10} \sqrt{10x-x^2}\,dx = \boldsymbol{25\pi/2}$

858. $\int\limits_0^3 \sqrt{18-2x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{9\pi}{2\sqrt{2}}}$

859. $\int\limits_0^3 \sqrt{24-2x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\pi}$

860. $\int\limits_0^3 \sqrt{36-2x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{9}{\sqrt{2}} + \frac{9\pi}{2\sqrt{2}}}$

861. $\int\limits_0^3 \sqrt{72-2x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\pi}$

862. $\int\limits_0^{60} \{x\}-\{x\}^2\,dx = \mathbf{10}$

863. $\int\limits_{66}^{666} \{x\}^2-\{x\}^3\,dx = \mathbf{50}$

Kolejne trzy zadania są przeznaczone do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

864. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int\limits_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+24}}\,.$$

Rozwiązanie:

Po skorzystaniu ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\int\limits_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+24}} = \int\limits_1^{25} \frac{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}{24}\,dx = \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot(x+24)^{3/2}-\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\right)\Bigg|_{x=1}^{25} =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot\left((x+24)^{3/2}-x^{3/2}\right)\Bigg|_{x=1}^{25} = \frac{1}{36}\cdot(343-125-125+1) = \frac{94}{36} = \frac{47}{18}\,.$$

865. Udowodnić nierówność

$$\int\limits_{1/4}^{1/2} x^{2x}\,dx < \frac{1}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Pochodna funkcji podcałkowej $f(x)=x^{2x}$ dana jest wzorem

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^{2x} = \frac{d}{dx}e^{2x\cdot\ln x} = e^{2x\cdot\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(2x\cdot\ln x) = x^{2x}\cdot(2\cdot\ln x+2) = 2\cdot x^{2x}\cdot(\ln x+1)\,.$$

Ponieważ $f'(x)>0$ dla $x>1/e$ oraz $f'(x)<0$ dla $0<x<1/e$, funkcja f jest malejąca w przedziale $(0,\,1/e)$ i rosnąca w przedziale $(1/e,\,+\infty)$. Zauważmy ponadto, że

$$f(1/4)=1/2$$

oraz

$$f(1/2)=1/2\,.$$

Wobec tego $f(x) < 1/2$ dla $x \in (1/4,\, 1/2)$, skąd

$$\int\limits_{1/4}^{1/2} x^{2x}\, dx < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\,.$$

Uwaga: Obliczenia komputerowe pokazują, że dana w zadaniu całka ma wartość w przybliżeniu 0,1215. Wydaje się to być zbyt bliskie oszacowaniu $1/8 = 0,125$, aby zadziałały inne metody szacowania (zapewne obarczone większym błędem).

866. Niech

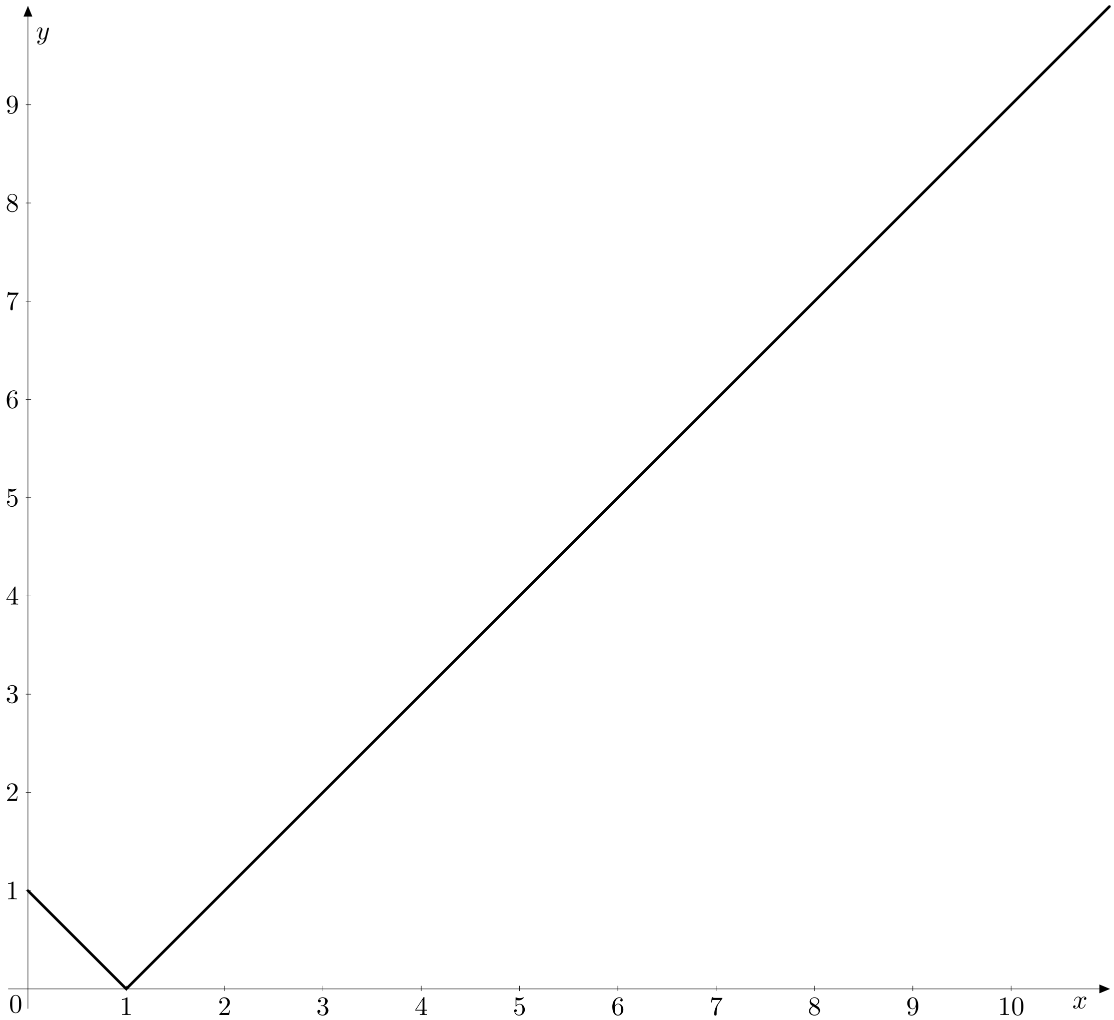
$$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} \qquad \text{oraz} \qquad f_{n+1}(x) = f_1\left(f_n(x)\right)\,.$$

Obliczyć wartość całki oznaczonej

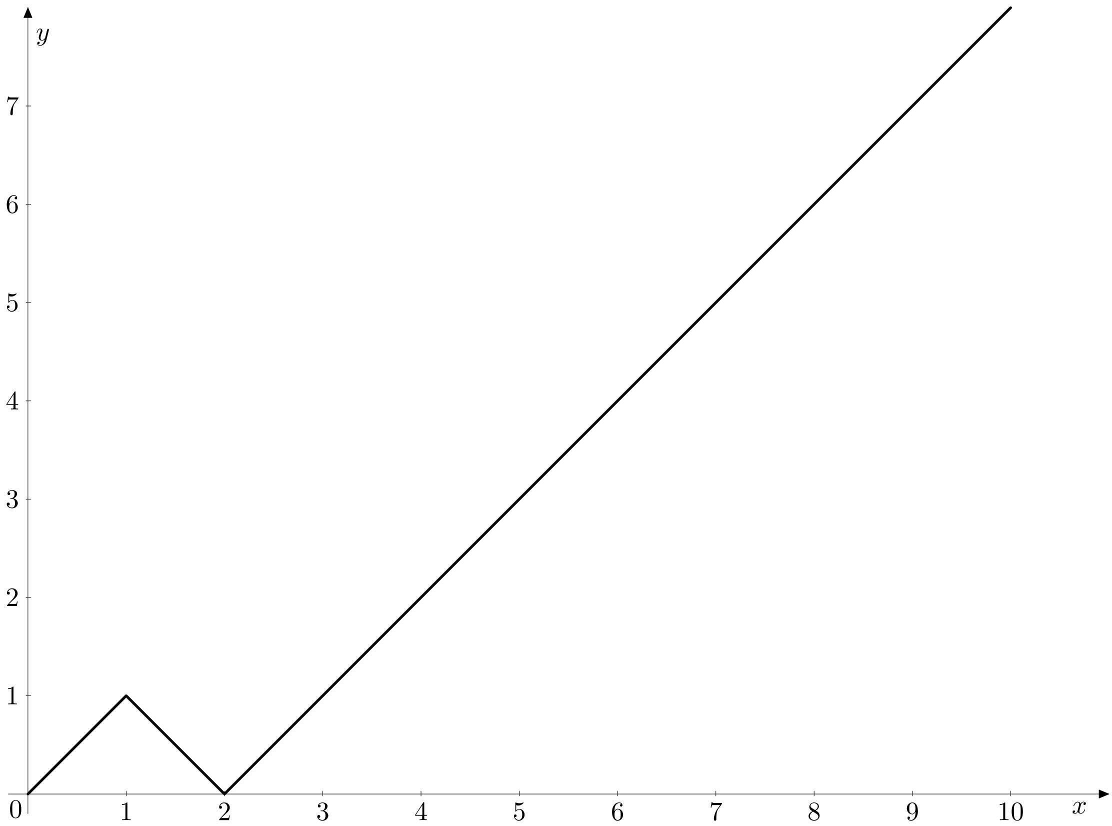
$$\int\limits_{0}^{10} f_5(x)\, dx\,.$$

Rozwiązanie:

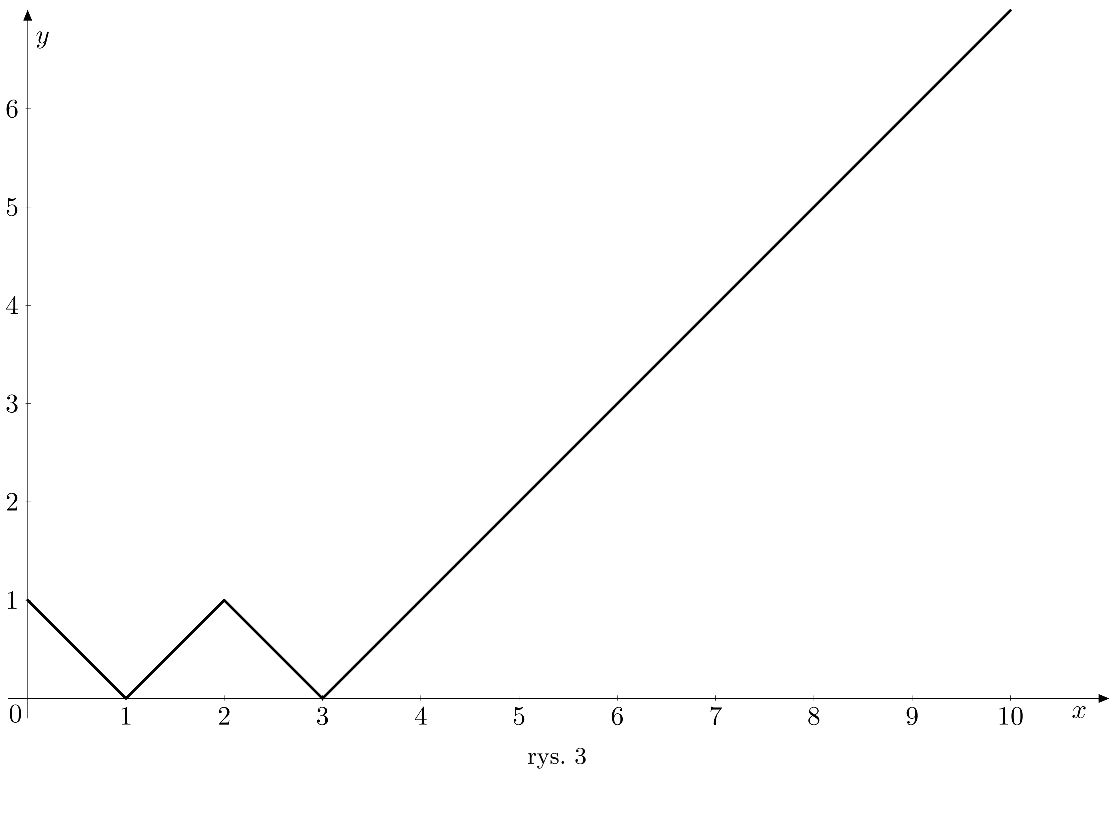
Zauważmy, że $f_1(x) = |x-1|$. W związku z tym wykres funkcji $f_1 \circ g$ powstaje z wykresu funkcji g przez przesunięcie tegoż wykresu w dół o 1 oraz symetryczne odbicie części wykresu, która znalazła się pod osią OX. Wykresy funkcji od f_1 do f_5 znajdują się odpowiednio na rysunkach od 1 do 5.



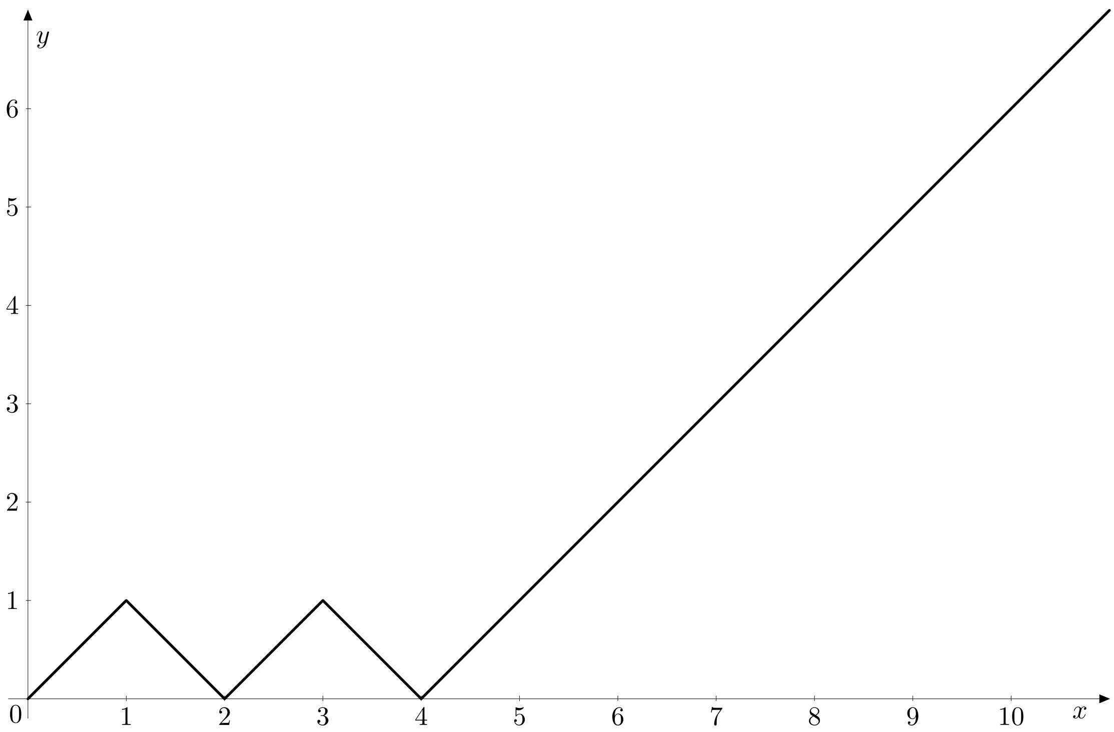
rys. 1



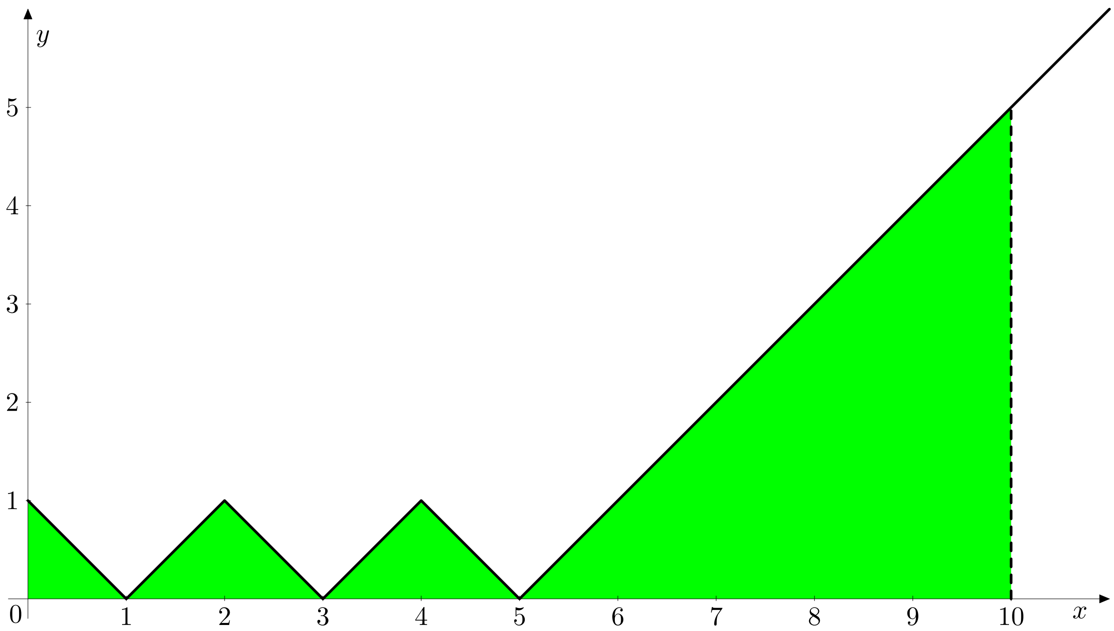
rys. 2



rys. 3



rys. 4



rys. 5

Szukana wartość całki oznaczonej jest równa polu zielonej figury z rysunku 5. Pole to wyliczamy sumując pola trójkątów, które się na nie składają:

$$\frac{1}{2}+1+1+\frac{25}{2}=15\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa 15.

867. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2 (5^x+3)\ dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\log_2 (5^x+3)\ .$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^x\cdot\ln 5}{5^x+3}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^x\cdot(\ln 5)^2}{5^x+3}-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^{2x}\cdot(\ln 5)^2}{(5^x+3)^2}=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{3\cdot 5^x\cdot(\ln 5)^2}{(5^x+3)^2}>0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła.

Ponieważ $f(1)=3$ oraz $f(3)=7$, wykres funkcji f leży poniżej cięciwy o końcach $(1,3)$ i $(3,7)$. Wobec tego $f(x)<2x+1$ dla $x\in(1,3)$ i w konsekwencji

$$\int_1^3 \log_2 (5^x+3)\ dx<\int_1^3 2x+1\,dx=10\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 10.

868. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}+\sqrt[3]{\frac{7x^2-4}{3}}\,dx\,.$$

Wskazówka: Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}\,,$$

a następnie przedstawić daną całkę w postaci pola odpowiedniej figury.

Rozwiązanie:

Niech $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}\,.$$

Zauważmy, że $f(1)=1$ oraz $f(2)=2$, a ponadto przekształcanie równania $y=f(x)$ prowadzi kolejno do

$$y=\sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}\,,\qquad y^2=\frac{3x^3+4}{7}\,,\qquad 7y^2=3x^3+4\,,$$

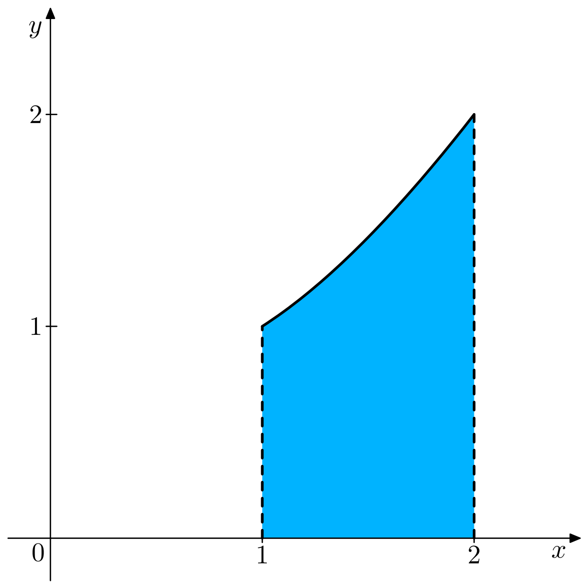
$$7y^2-4=3x^3\,, \qquad \frac{7y^2-4}{3}=x^3\,, \qquad \sqrt[3]{\frac{7y^2-4}{3}}=x\,.$$

Oznacza to, że dana w zadaniu całka ma postać

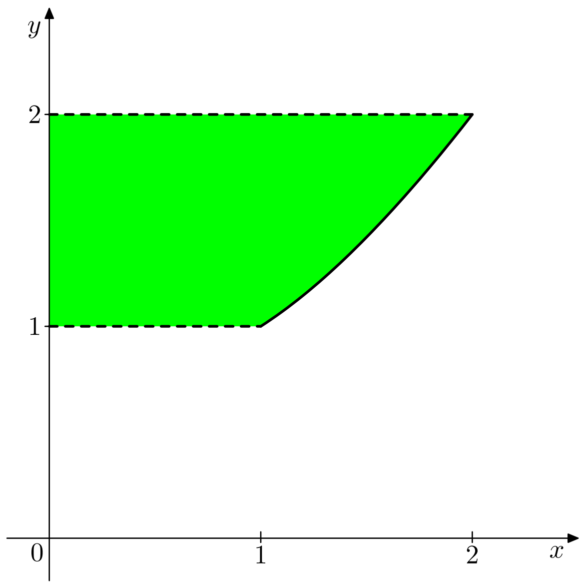
$$\int_1^2 f(x)+f^{-1}(x)\,dx\,,$$

gdzie $f^{-1}:[1,\,2]\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f określoną wzorem

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{7x^2-4}{3}}\,.$$



rys. 6



rys. 7

Całka

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}\,dx$$

jest polem figury

$$\{(x,\,y):\ 1\leqslant x\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}=\left\{(x,\,y):\ 1\leqslant x\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}\right\}$$

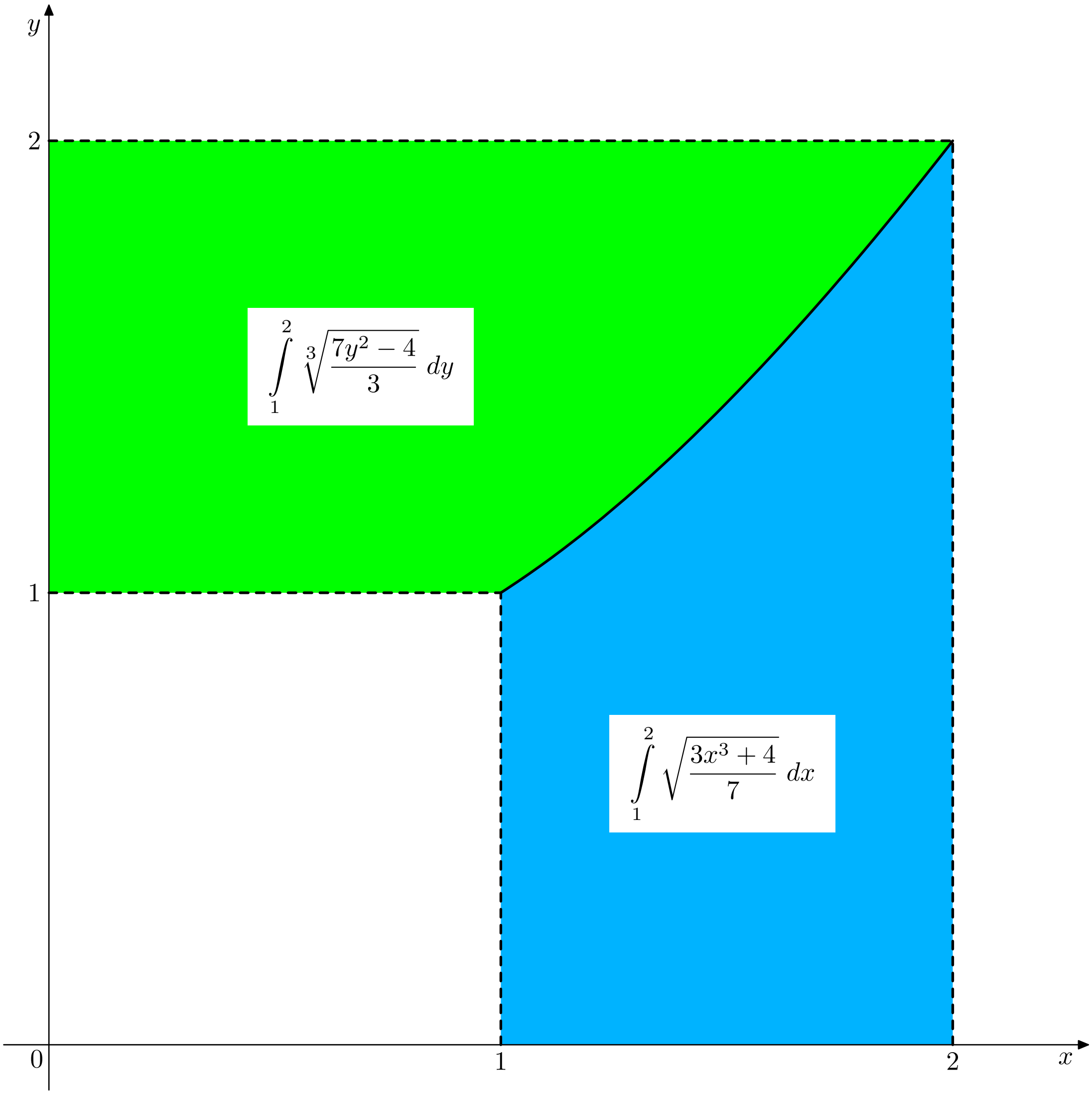
zamalowanej na rysunku 6 kolorem niebieskim.

Z kolei na rysunku 7 kolorem zielonym zamalowana jest figura

$$\left\{(x,\,y):\ 1\leqslant y\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant x\leqslant f^{-1}(y)\right\}=\left\{(x,\,y):\ 1\leqslant y\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant x\leqslant \sqrt[3]{\frac{7y^2-4}{3}}\right\},$$

której pole jest równe

$$\int_1^2 f^{-1}(y)\,dy=\int_1^2 \sqrt[3]{\frac{7y^2-4}{3}}\,dy=\int_1^2 \sqrt[3]{\frac{7x^2-4}{3}}\,dx\,.$$



rys. 8

Dana w zadaniu całka ma więc wartość równą polu figury zamalowanej na rysunku 8. Ponieważ zamalowana figura jest sumą trzech kwadratów jednostkowych, jej pole jest równe 3.

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość 3.

869. Rozstrzygnąć, która całka jest większa:

$$\int\limits_1^2 \sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}}\,dx \qquad \text{czy} \qquad \int\limits_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}}\,dx \quad ?$$

Rozwiązanie:

Niech $$f(x)=\sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=\sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}}\,.$$

Wówczas $f(1)=g(1)=2$ oraz $f(2)=g(2)=1$, a co więcej funkcje f i g są na przedziale $[1,\,2]$ malejące i odwrotne do siebie.

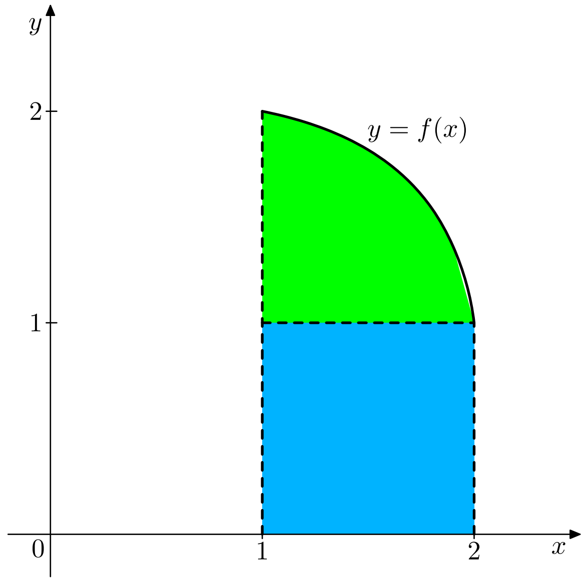
Całka

$$\int_1^2 \sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}}\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx$$

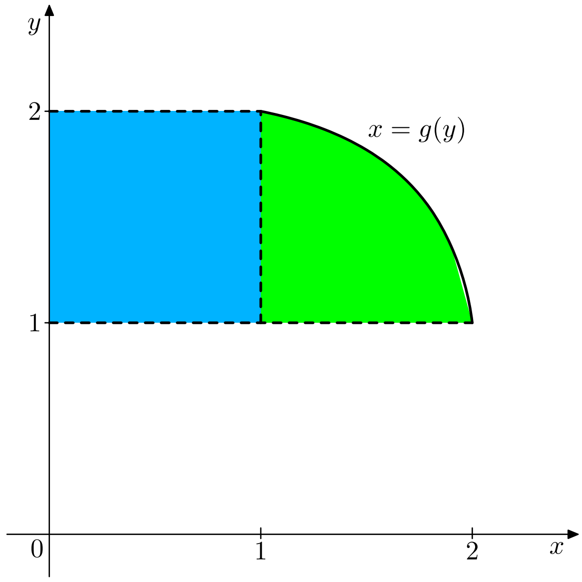
jest równa polu figury

$$\{(x,\,y):\ 1\leqslant x\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

zamalowanej na rysunku 9.



rys. 9



rys. 10

Z kolei całka

$$\int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}}\,dx=\int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7y^4}{15}}\,dy=\int_1^2 g(y)\,dy$$

jest równa polu figury

$$\{(x,\,y):\ 1\leqslant y\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant x\leqslant g(y)\}$$

zamalowanej na rysunku 10.

Ponieważ każda z tych figur składa się z kwadratu jednostkowego (niebieskiego) oraz tego samego trójkąta krzywoliniowego (zielonego), pola obu figur są równe.

Odpowiedź: Podane całki są równe.

896. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,.$$

Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $t=\sqrt{1+\sqrt{x}}$, czyli $x=\left(t^2-1\right)^2$ i formalnie $dx=4\left(t^3-t\right)\,dt$, otrzymujemy

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\int_1^2 \frac{4\left(t^3-t\right)\,dt}{t}=4\cdot\int_1^2 t^2-1\,dt=\frac{4t^3}{3}-4t\Bigg|_{t=1}^{2}=\frac{32}{3}-8-\frac{4}{3}+4=\frac{28}{3}-4=\frac{16}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość 16/3.

897. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}\,.$$

Rozwiązanie:
Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^4+x^2}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot x^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x^2}\,, \qquad (*)$$

$$1=(Ax+B)\cdot x^2+C\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)+D\cdot\left(x^2+1\right)\,,$$

$$1=Ax^3+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+D\,,$$

$$\begin{cases} 0 = A+C \\ 0 = B+D \\ 0 = C \\ 1 = D \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A=0$ oraz $B=-1$.

Wobec tego

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}=\int_1^{\sqrt{3}} -\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2}\,dx=-\operatorname{arctg} x-\frac{1}{x}\Bigg|_{x=1}^{\sqrt{3}}=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}1+1=$$

$$=-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+1=1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}$.

898. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 \frac{x^4\,dx}{1+\sqrt[3]{4x^5-3}}\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonamy podstawienie

$$t=\sqrt[3]{4x^5-3}\,,$$

czyli

$$t^3=4x^5-3$$

oraz formalnie

$$3t^2\,dt=20x^4\,dx\,,$$

zauważając przy tym, że zależność t od x jest rosnąca, a zatem przedziałowi całkowania $x\in[1,\,2]$ odpowiada przedział $t\in[1,\,5]$.

Otrzymujemy

$$\int_1^2 \frac{x^4\,dx}{1+\sqrt[3]{4x^5-3}}=\frac{3}{20}\cdot\int_1^5\frac{t^2\,dt}{1+t}=\frac{3}{20}\cdot\int_1^5\frac{(t+1)\cdot(t-1)+1}{1+t}\,dt=\frac{3}{20}\cdot\int_1^5 t-1+\frac{1}{1+t}\,dt=$$

$$=\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\,\Bigg|_{t=1}^{5}\right)=\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{25}{2}-5+\ln6-\frac{1}{2}+1-\ln2\right)=\frac{3}{20}\cdot(8+\ln3)=$$

$$=\frac{6}{5}+\frac{3\cdot\ln3}{20}\,.$$

Odpowiedź: Wartość całki podanej w treści zadania jest równa $\frac{6}{5}+\frac{3\cdot\ln3}{20}$.

899. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-1}^0 x\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt[3]{x+1}, \qquad x=t^3-1$$

i formalnie

$$dx=3t^2\,dt.$$

Ponadto $x=-1$ odpowiada $t=0$, a $x=0$ odpowiada $t=1$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[-1,\,0]$ odpowiada przedziałowi $t\in[0,\,1]$.

Otrzymujemy

$$\int_{-1}^{0} x\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx=\int_{0}^{1}\left(t^3-1\right)\cdot t\cdot 3t^2\,dt=3\cdot\int_{0}^{1} t^6-t^3\,dt=3\cdot\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\Bigg|_{t=0}^{1}\right)=$$

$$=3\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)=3\cdot\frac{4-7}{28}=3\cdot\frac{-3}{28}=-\frac{9}{28}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-9/28$.

900. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{0}^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $x=t^6$ i formalnie $dx=6t^5\,dt$, otrzymujemy:

$$\int_{0}^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}=\int_{0}^{2}\frac{6t^5\,dt}{t^3+2t^2}=6\cdot\int_{0}^{2}\frac{t^3\,dt}{t+2}=6\cdot\int_{0}^{2}\frac{t^3+8}{t+2}-\frac{8}{t+2}\,dt=6\cdot\int_{0}^{2}t^2-2t+4-\frac{8}{t+2}\,dt=$$

$$=2t^3-6t^2+24t-48\ln|t+2|\Bigg|_{t=0}^{2}=16-24+48-48\ln4+48\ln2=40-48\ln2\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $40-48\ln2$.

901. Wskazać takie liczby całkowite dodatnie a i b, że

$$\int_{a}^{b}\frac{dx}{x^2-14x+50}=\frac{\pi}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy funkcję podcałkową

$$\int_{a}^{b}\frac{dx}{x^2-14x+50}=\int_{a}^{b}\frac{dx}{(x-7)^2+1}\,,$$

a następnie wykonujemy podstawienie $t=x-7$:

$$\int_{a}^{b}\frac{dx}{(x-7)^2+1}=\int_{a-7}^{b-7}\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg} t\Bigg|_{t=a-7}^{b-7}=\operatorname{arctg}(b-7)-\operatorname{arctg}(a-7)\,.$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\frac{\pi}{2}\,,$$

skąd wynika, że warunki zadania będą spełnione, jeżeli przyjmiemy $b-7=1$ i $a-7=-1$.

Odpowiedź

Warunki zadania są spełnione przez liczby $a=6$ i $b=8$.

902. Podać wartość całki

$$\int_{-2021}^{2021} x^{2021}\cdot\left(x^{666}+1\right)^{777}\cdot\sin\sin\cos\sin\sin x^{2021}\,dx\,.$$

Całka ma wartość 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

903. Która całka ma większą wartość

$$\int_{-2022}^{0} x^{2022}\cdot\left(x^{666}+1\right)^{777}\cdot\sin\sin\cos\sin\sin x^{2021}\,dx$$

czy

$$\int_{0}^{2022} x^{2022}\cdot\left(x^{666}+1\right)^{777}\cdot\sin\sin\cos\sin\sin x^{2021}\,dx\ ?$$

Funkcja podcałkowa jest parzysta, skąd wynika, że podane całki są równe.

---

904. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę sześcianów otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\,dx\,.$$

Stosując podstawienie $t=\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}$, czyli $x=t^6-2t^3+1$ i formalnie $dx=6t^5-6t^2\,dt$, otrzymujemy:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\,dx=\int_1^{\sqrt[3]{2}} t^2\cdot\left(6t^5-6t^2\right)\,dt=\int_1^{\sqrt[3]{2}} 6t^7-6t^4\,dt=\frac{3t^8}{4}-\frac{6t^5}{5}\Bigg|_{t=1}^{\sqrt[3]{2}}=$$

$$=3\cdot\sqrt[3]{4}-\frac{12\cdot\sqrt[3]{4}}{5}-\frac{3}{4}+\frac{6}{5}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{5}+\frac{9}{20}\,.$$

Stosując podstawienie $t=\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}$, czyli $x=t^6+2t^3+1$ i formalnie $dx=6t^5+6t^2\,dt$, otrzymujemy:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\,dx=\int_{-1}^{0} t^2\cdot\left(6t^5+6t^2\right)\,dt=\int_{-1}^{0} 6t^7+6t^4\,dt=\frac{3t^8}{4}+\frac{6t^5}{5}\Bigg|_{t=-1}^{0}=$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{6}{5}=\frac{9}{20}\,.$$

Ponadto

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x-1}\,dx = \left.\frac{3\cdot(x-1)^{4/3}}{4}\right|_{x=0}^{1} = -\frac{3}{4}$$

W konsekwencji

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{5}+\frac{9}{20}-\frac{3}{4}+\frac{9}{20}\right) = \frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{10}+\frac{3}{40}\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{10}+\frac{3}{40}$.