

Kolokwium nr 3: środa 27.03.2024, godz. 14:15–15:45, materiał zad. 738–913.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartki 14 i 21.03.2024.

Zadania podobne do zadań wcześniejszych można pominąć
jeśli nie sprawiają trudności.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Pole i całka oznaczona.

W każdym z poniższych 35 zadań podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

Wskazówka: W niektórych zadaniach lepiej nie całkować bezpośrednio, tylko narysować odpowiednią figurę i obliczyć jej pole.

$$829. \int_{2020}^{2024} 7 dx = \dots\dots\dots \quad 830. \int_0^3 x^2 dx = \dots\dots\dots \quad 831. \int_0^2 x^3 dx = \dots\dots\dots$$

$$832. \int_0^1 x^{10} dx = \dots\dots\dots \quad 833. \int_1^4 \sqrt{x} dx = \dots\dots\dots \quad 834. \int_1^{27} \sqrt[3]{x} dx = \dots\dots\dots$$

$$835. \int_{-2}^{10} |x| dx = \dots\dots\dots \quad 836. \int_1^3 \frac{dx}{x} = \dots\dots\dots \quad 837. \int_1^3 \frac{dx}{x+1} = \dots\dots\dots$$

$$838. \int_1^7 \frac{dx}{x+2} = \dots\dots\dots \quad 839. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots \quad 840. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots$$

$$841. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots \quad 842. \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots \quad 843. \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots$$

$$844. \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad 845. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad 846. \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

$$847. \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad 848. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad 849. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

$$850. \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad 851. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

$$852. \int_0^3 \sqrt{12-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad 853. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

854. $\int_0^6 \sqrt{12x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

855. $\int_{10}^{20} \sqrt{20x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

856. $\int_0^6 \sqrt{6x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

857. $\int_0^{10} \sqrt{10x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

858. $\int_0^3 \sqrt{18 - 2x^2} dx = \dots\dots\dots$

859. $\int_0^3 \sqrt{24 - 2x^2} dx = \dots\dots\dots$

860. $\int_0^3 \sqrt{36 - 2x^2} dx = \dots\dots\dots$

861. $\int_0^3 \sqrt{72 - 2x^2} dx = \dots\dots\dots$

862. $\int_0^{60} \{x\} - \{x\}^2 dx = \dots\dots\dots$

863. $\int_{66}^{666} \{x\}^2 - \{x\}^3 dx = \dots\dots\dots$

Kolejne trzy zadania są przeznaczone do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

864. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+24}}.$$

865. Udowodnić nierówność

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x} dx < \frac{1}{8}.$$

866. Niech

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} \quad \text{oraz} \quad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)).$$

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{10} f_5(x) dx.$$

867. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2(5^x + 3) dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

868. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}} + \sqrt[3]{\frac{7x^2-4}{3}} dx.$$

Wskazówka: Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}},$$

a następnie przedstawić daną całkę w postaci pola odpowiedniej figury.

869. Rozstrzygnąć, która całka jest większa:

$$\int_1^2 \sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}} dx \quad \text{czy} \quad \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}} dx \quad ?$$

Udowodnić następujące nierówności:

$$\mathbf{870.} \quad \frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1} dx < \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{871.} \quad \frac{1}{11} < \int_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x} < \frac{1}{8}$$

$$\mathbf{872.} \quad \int_{-1}^2 \frac{|x|}{1+x^2} dx < \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{873.} \quad \int_0^1 x \cdot (1-x^{99+x}) dx < \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{874.} \quad 5 < \int_1^3 x^x dx < 31$$

$$\mathbf{875.} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x} < \frac{3}{4}$$

$$\mathbf{876.} \quad 2\sqrt{2} < \int_2^4 x^{1/x} dx$$

$$\mathbf{877.} \quad \frac{19}{3} < \int_2^3 x^x dx < \frac{65}{4}. \quad \mathbf{Wsk.:} \text{ Oszacować } x^x \text{ przez } x^a.$$

878. Niech

$$C(a,b) = \left[\int_a^b \log_x 2 dx \right],$$

gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y . Obliczyć wartości wyrażeń:

a) $C(80,122)$

b) $C(200,240)$

c) $C(400,440)$

d) $C(800,880)$

879. Dla podanej liczby a wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą dodatnią b , aby zachodziła równość

$$\int_a^b \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{\ln 5}{2}.$$

a) $a=0$

b) $a=1$

c) $a=2$

d) $a=3$

880. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{666} \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right| dx.$$

881. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{49}^{169} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+120}}.$$

882. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2(3^x + 5) dx$$

jest mniejsza czy większa od 8.

883. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_3^5 \sqrt[7]{x^3 + 3} dx$$

jest mniejsza czy większa od 11/3.

W kolejnych 12 zadaniach na podstawie znajomości przybliżenia jednej całki podaj przybliżoną wartość drugiej całki.

$$884. \int_1^2 \sqrt{x^3 + 8} dx \approx 3,415$$

$$\int_3^4 \sqrt[3]{x^2 - 8} dx \approx \dots\dots\dots$$

$$885. \int_1^2 \sqrt{17 - x^3} dx \approx 3,623$$

$$\int_3^4 \sqrt[3]{17 - x^2} dx \approx \dots\dots\dots$$

$$886. \int_2^3 \sqrt{108 - x^3} dx \approx 9,574$$

$$\int_9^{10} \sqrt[3]{108 - x^2} dx \approx \dots\dots\dots$$

$$887. \int_2^3 \sqrt{x^3 + 73} dx \approx 9,443$$

$$\int_9^{10} \sqrt[3]{x^2 - 73} dx \approx \dots\dots\dots$$

$$888. \int_1^3 \log_3(2^x + 1) dx \approx 2,953$$

$$\int_1^2 \log_2(3^x - 1) dx \approx \dots\dots\dots$$

$$889. \int_1^3 \log_3(11 - 2^x) dx \approx 3,385$$

$$\int_1^2 \log_2(11 - 3^x) dx \approx \dots\dots\dots$$

$$890. \int_0^2 \log_3(28 - 5^x) dx \approx 5,362$$

$$\int_1^3 \log_5(28 - 3^x) dx \approx \dots\dots\dots$$

$$891. \int_0^2 \log_3(5^x + 2) dx \approx 3,698$$

$$\int_1^3 \log_5(3^x - 2) dx \approx \dots\dots\dots$$

$$892. \int_1^3 \sqrt{3^x - 2} dx \approx 5,532$$

$$\int_1^5 \log_3(x^2 + 2) dx \approx \dots\dots\dots$$

$$893. \int_1^3 \sqrt{28 - 3^x} dx \approx 8,042$$

$$\int_1^5 \log_3(28 - x^2) dx \approx \dots\dots\dots$$

$$894. \int_0^3 \sqrt{17 - 2^x} dx \approx 11,047$$

$$\int_3^4 \log_2(17 - x^2) dx \approx \dots\dots\dots$$

$$895. \int_0^3 \sqrt{2^x + 8} dx \approx 10,078$$

$$\int_3^4 \log_2(x^2 - 8) dx \approx \dots\dots\dots$$

Całkowanie przez części i przez podstawienie w całce oznaczonej.

Kolejne 8 zadań jest przeznaczonych do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

896. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}.$$

897. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 + x^2}.$$

898. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 \frac{x^4 dx}{1 + \sqrt[3]{4x^5 - 3}}.$$

899. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-1}^0 x \cdot \sqrt[3]{x+1} dx$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

900. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}.$$

901. Wskazać takie liczby całkowite dodatnie a i b , że

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 - 14x + 50} = \frac{\pi}{2}.$$

902. Podać wartość całki

$$\int_{-2021}^{2021} x^{2021} \cdot (x^{666} + 1)^{777} \cdot \sin \sin \cos \sin \sin x^{2021} dx.$$

903. Która całka ma większą wartość

$$\int_{-2022}^0 x^{2022} \cdot (x^{666} + 1)^{777} \cdot \sin \sin \cos \sin \sin x^{2021} dx$$

czy

$$\int_0^{2022} x^{2022} \cdot (x^{666} + 1)^{777} \cdot \sin \sin \cos \sin \sin x^{2021} dx ?$$

904. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}.$$

905. Podać wartość całki

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2023} x - \cos^{2023} x dx.$$

906. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^{27} \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}.$$

907. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 + 3x^2}.$$

908. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^3 \frac{x dx}{1 + \sqrt[6]{7x^2 + 1}}.$$

909. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-1}^0 x \cdot \sqrt[4]{x+1} dx$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

910. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}}.$$

911. Wskazać takie liczby całkowite dodatnie a i b , że

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 - 6x + 12} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{3}}.$$

912. Wskazać takie liczby całkowite dodatnie a i b , że

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 - 6x + 14} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{5}}.$$

913. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_5^7 \log_2(x^2 - 17) + \sqrt{2^{x-2} + 17} dx.$$