

827. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny):

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x+2} + \frac{E}{x+3}, \\ 2x+3 &= A \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + B \cdot x \cdot (x+2) \cdot (x+3) + \\ &+ D \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+3) + E \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+2). \end{aligned} \quad (*)$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (*), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy¹ do równości (*) kolejno² $x=0, -1, -2, -3$. Otrzymujemy:

$$\text{dla } x=0 \quad 3=6A, \text{ skąd } A=1/2,$$

$$\text{dla } x=-1 \quad 1=-2B, \text{ skąd } B=-1/2,$$

$$\text{dla } x=-2 \quad -1=2D, \text{ skąd } D=-1/2,$$

$$\text{dla } x=-3 \quad -3=-6E, \text{ skąd } E=1/2.$$

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln|x| - \ln|x+1| - \ln|x+2| + \ln|x+3|) + C. \end{aligned}$$

Sposób II (trikowy):

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx &= \int \frac{2x+3}{(x \cdot (x+3)) \cdot ((x+1) \cdot (x+2))} dx = \\ &= \int \frac{2x+3}{(x^2+3x) \cdot (x^2+3x+2)} dx, \end{aligned}$$

a następnie podstawiamy $t = x^2 + 3x$ i formalnie $dt = (2x+3) dx$. Otrzymujemy

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x) \cdot (x^2+3x+2)} dx = \int \frac{dt}{t \cdot (t+2)}.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t \cdot (t+2)} = \frac{1/2}{t} - \frac{1/2}{t+2},$$

¹Taka metoda jest o wiele szybsza, zwłaszcza przy wysokim stopniu mianownika, jednak można ją wydajnie zastosować tylko w przypadku mianownika będącego iloczynem różnych czynników liniowych.

²To są wartości x , przy których czynniki liniowe się zerują.

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t \cdot (t+2)} &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} dt = \frac{1}{2} \cdot (\ln|t| - \ln|t+2|) + C = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln|x^2+3x| - \ln|x^2+3x+2|) + C.\end{aligned}$$

828. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^8+x}.$$

Wskazówka: Przemnożyć licznik i mianownik przez x^6 .

Rozwiązanie:

Sposób I

Przepisanie funkcji podcałkowej w postaci

$$\int \frac{dx}{x^8+x} = \int \frac{x^6 dx}{x^{14}+x^7}$$

nasuwa pomysł podstawienia $t = x^7$ i formalnie $dt = 7x^6 dx$, co prowadzi do

$$\begin{aligned}\int \frac{x^6 dx}{x^{14}+x^7} &= \frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{t^2+t} = \frac{1}{7} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} dt = \frac{1}{7} \cdot (\ln|t| - \ln|t+1|) + C = \\ &= \frac{1}{7} \cdot (\ln|x^7| - \ln|x^7+1|) + C = \ln|x| - \frac{\ln|x^7+1|}{7} + C.\end{aligned}$$

Sposób II

Wykonując podstawienie $x = t^{-1/7}$ i formalnie $dx = -\frac{dt}{7t^{8/7}}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^8+x} &= -\frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{(t^{-8/7}+t^{-1/7}) \cdot t^{8/7}} = -\frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{t+1} = -\frac{1}{7} \cdot \ln|t+1| + C = \\ &= -\frac{1}{7} \cdot \ln|x^{-7}+1| + C = -\frac{1}{7} \cdot \ln\left|\frac{x^7+1}{x^7}\right| + C = \frac{1}{7} \cdot \ln\left|\frac{x^7}{x^7+1}\right| + C.\end{aligned}$$