W każdym z poniższych 20 zadań podaj wzór na funkcję różniczkowalną na całej prostej (lub w podanej dziedzinie) o podanym wzorze na pochodną oraz o podanej wartości w podanym punkcie.

763. $f'(x)=(4x-5)^{54}$ $f(1)=1$ $f(x)=\mathbf{\dfrac{(4x-5)^{55}}{220}+\dfrac{221}{220}}$

764. $f'(x)=\sqrt{3x+1}$ $f(1)=1$ $D_f=\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$ $f(x)=\mathbf{\dfrac{2}{9}\cdot(3x+1)^{3/2}-\dfrac{7}{9}}$

765. $f'(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^4}$ $f(1)=1$ $f(x)=\mathbf{\dfrac{-1}{6\cdot(x^2+1)^3}+\dfrac{49}{48}}$

766. $f'(x)=\dfrac{x^3}{x^4+1}$ $f(0)=7$ $f(x)=\mathbf{\dfrac{1}{4}\cdot\ln\left(x^4+1\right)+7}$

767. $f'(x)=\dfrac{1}{(3x-5)^2+1}$ $f(2)=0$ $f(x)=\mathbf{\dfrac{1}{3}\cdot arctg\,(3x-5)-\dfrac{\pi}{12}}$

768. $f'(x)=\sqrt[5]{x}$ $f(1)=1$ $f(x)=\mathbf{\dfrac{5x^{6/5}}{6}+\dfrac{1}{6}}$

769. $f'(x)=200x\cdot\left(x^2+1\right)^{99}$ $f(0)=0$ $f(x)=\mathbf{\left(x^2+1\right)^{100}-1}$

770. $f'(x)=6x^3\cdot\sqrt{x^4+9}$ $f(2)=2$ $f(x)=\mathbf{\left(x^4+9\right)^{3/2}-123}$

771. $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ $f(-1)=-1$ $f(x)=\mathbf{\ln\left(x^2+x+1\right)-1}$

772. $f'(x)=\dfrac{4x^3+2x+1}{(x^4+x^2+x+1)^2}$ $f(1)=1$ $f(x)=\mathbf{-\dfrac{1}{x^4+x^2+x+1}+\dfrac{5}{4}}$

773. $f'(x)=\sqrt[7]{x+1}$ $f(0)=2$ $f(x)=\mathbf{\dfrac{7(x+1)^{8/7}}{8}+\dfrac{9}{8}}$

774. $f'(x)=x^2\cdot\left(x^3+1\right)^{100}$ $f(0)=1$ $f(x)=\mathbf{\dfrac{\left(x^3+1\right)^{101}}{303}+\dfrac{302}{303}}$

775. $f'(x)=x^5\cdot\sqrt[3]{x^6+7}$ $f(1)=0$ $f(x)=\mathbf{\dfrac{\left(x^6+7\right)^{4/3}}{8}-2}$

776. $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ $f(0)=0$ $f(x)=\mathbf{\ln\left(e^x+1\right)-\ln 2}$

777. $f'(x)=\frac{2x^3+x}{x^4+x^2+1}$ $f(0)=1$ $f(x)=\frac{\mathbf{ln}\left(\mathbf{x^4+x^2+1}\right)}{\mathbf{2}}+\mathbf{1}$

778. $f'(x)=\frac{2x^3+x}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}$ $f(1)=1$ $f(x)=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\cdot(x^4+x^2+1)}}+\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}$

779. $f'(x)=\frac{2x^3+x}{\left(x^4+x^2+1\right)^3}$ $f(1)=1$ $f(x)=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\cdot(x^4+x^2+1)^2}}+\frac{\mathbf{37}}{\mathbf{36}}$

780. $f'(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$ $f(0)=0$ $f(x)=\mathbf{arctg\,(x+1)}-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$

W kolejnych dwóch zadaniach funkcje mają być ciągłe na $\mathbb{R}$ i różniczkowalne na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

781. $f'(x)=\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ $f(0)=2$ $f(x)=\mathbf{-3\cdot\cos}\,\boldsymbol{\sqrt[3]{x}}+\mathbf{5}$

782. $f'(x)=\frac{\sin\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}$ $f(0)=2$ $f(x)=\mathbf{-5\cdot\cos}\,\boldsymbol{\sqrt[5]{x}}+\mathbf{7}$

Kolejne cztery zadania są przeznaczone do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy wcześniejsze zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

783. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n\cdot\sqrt[7]{x^5+1}\,dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n.

Rozwiązanie:

Przyjmiemy $\mathbf{n=4}$ i wykonamy podstawienie

$$t=\sqrt[7]{x^5+1}\,,$$

czyli

$$t^7=x^5+1$$

oraz formalnie

$$7t^6\,dt=5x^4\,dx\,.$$

Otrzymujemy

$$\int x^4\cdot\sqrt[7]{x^5+1}\,dx=\frac{1}{5}\int\sqrt[7]{x^5+1}\cdot5x^4\,dx=\frac{1}{5}\int t\cdot7t^6\,dt=\frac{7}{5}\int t^7\,dt=\frac{7}{5}\cdot\frac{t^8}{8}+C=\frac{7\cdot t^8}{40}+C=$$

$$=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{40}}\cdot\left(\mathbf{x^5+1}\right)^{\mathbf{8/7}}+\mathbf{C}\,.$$

784. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[11]{x^7+1}\,dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n.

Rozwiązanie:

Przyjmiemy $\mathbf{n=6}$ i wykonamy podstawienie

$$t=\sqrt[11]{x^7+1}\,,$$

czyli

$$t^{11}=x^7+1$$

oraz formalnie

$$11t^{10}\,dt=7x^6\,dx\,.$$

Otrzymujemy

$$\int x^6 \cdot \sqrt[11]{x^7+1}\,dx=\frac{1}{7}\int \sqrt[11]{x^7+1}\cdot 7x^6\,dx=\frac{1}{7}\int t\cdot 11t^{10}\,dt=\frac{11}{7}\int t^{11}\,dt=\frac{11}{7}\cdot\frac{t^{12}}{12}+C=$$

$$=\frac{11\cdot t^{12}}{84}+C=\mathbf{\frac{11}{84}\cdot\left(x^7+1\right)^{12/11}+C\,.}$$

785. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+40}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y=x+2$ oraz $t=y/6$:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+40}=\int \frac{dx}{(x+2)^2+36}=\int \frac{dy}{y^2+36}=\int \frac{dy}{36(y/6)^2+36}=\int \frac{6\,dt}{36t^2+36}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\operatorname{arctg} t}{6}+C=\frac{\operatorname{arctg}(y/6)}{6}+C=\frac{\operatorname{arctg}((x+2)/6)}{6}+C\,.$$

786. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt[3]{8x^{17}+x^{12}}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy podaną całkę

$$\int \sqrt[3]{8x^{17}+x^{12}}\,dx=\int x^4\cdot\sqrt[3]{8x^5+1}\,dx$$

i wykonujemy podstawienie $t=8x^5+1$ oraz formalnie $dt=40x^4\,dx$. Otrzymujemy

$$\int x^4\cdot\sqrt[3]{8x^5+1}\,dx=\frac{1}{40}\cdot\int 40x^4\cdot\sqrt[3]{8x^5+1}\,dx=\frac{1}{40}\cdot\int \sqrt[3]{t}\,dt=\frac{1}{40}\cdot\frac{3\cdot t^{4/3}}{4}+C=$$

$$=\frac{3\cdot t^{4/3}}{160}+C=\frac{3\cdot\left(8x^5+1\right)^{4/3}}{160}+C\,.$$