746. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem
$$f'(x)=\sqrt{x^4-8x^2+16}\,.$$
Ponadto wiadomo, że $f(-3)=-3$. Wyznaczyć $f(3)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że
$$f'(x)=\sqrt{x^4-8x^2+16}=\sqrt{\left(x^2-4\right)^2}=\left|x^2-4\right|=\begin{cases} x^2-4 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-2) \\ 4-x^2 & \text{dla} \quad x\in[-2,\,2) \\ x^2-4 & \text{dla} \quad x\in[2,\,+\infty) \end{cases}$$

Wobec tego
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-4x+C_1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-2) \\ 4x-\dfrac{x^3}{3}+C_2 & \text{dla} \quad x\in[-2,\,2) \\ \dfrac{x^3}{3}-4x+C_3 & \text{dla} \quad x\in[2,\,+\infty) \end{cases}$$

Ciągłość tak określonej funkcji f w punktach -2 oraz 2 wymaga odpowiednio spełnienia następujących równości:
$$\frac{x^3}{3}-4x+C_1=4x-\frac{x^3}{3}+C_2 \quad \text{dla} \quad x=-2, \quad \text{czyli} \quad \frac{16}{3}+C_1=-\frac{16}{3}+C_2$$
oraz
$$4x-\frac{x^3}{3}+C_2=\frac{x^3}{3}-4x+C_3 \quad \text{dla} \quad x=2, \quad \text{czyli} \quad \frac{16}{3}+C_2=-\frac{16}{3}+C_3\,.$$
Ponadto równość $f(-3)=-3$ prowadzi do
$$\frac{x^3}{3}-4x+C_1=-3 \quad \text{dla} \quad x=-3, \quad \text{skąd} \quad C_1=-6\,.$$
W konsekwencji
$$C_2=C_1+\frac{32}{3}=\frac{14}{3} \quad \text{oraz} \quad C_3=C_2+\frac{32}{3}=\frac{46}{3}\,.$$

Zatem
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-4x-6 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-2) \\ 4x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{14}{3} & \text{dla} \quad x\in[-2,\,2) \\ \dfrac{x^3}{3}-4x+\dfrac{46}{3} & \text{dla} \quad x\in[2,\,+\infty) \end{cases}$$

Ostatecznie
$$f(3)=\frac{3^3}{3}-4\cdot 3+\frac{46}{3}=\frac{37}{3}\,.$$

747. Skonstruować funkcję różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$f(0)=0 \qquad \text{oraz} \qquad f'(x)=\sqrt{x^4+2x^3+x^2} \quad \text{dla} \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Rozwiązanie:

Przepisujemy wzór na pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\sqrt{x^4+2x^3+x^2}=\sqrt{\left(x^2+x\right)^2}=\left|x^2+x\right|=\begin{cases} x^2+x & \text{dla} \;\; x\in(-\infty,\,-1]\cup[0,\,+\infty) \\ -x^2-x & \text{dla} \;\; x\in(-1,\,0) \end{cases}$$

Dla $x\in(-\infty,\,-1]$ zachodzi $f'(x)=x^2+x$, mamy więc[1]

$$f(x)=\int x^2+x\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1\,.$$

Dla $x\in[-1,\,0]$ zachodzi $f'(x)=-x^2-x$, mamy więc

$$f(x)=\int -x^2-x\,dx=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C_2\,.$$

Dla $x\in[0,\,+\infty)$ zachodzi $f'(x)=x^2+x$, mamy więc

$$f(x)=\int x^2+x\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_3\,.$$

Aby zagwarantować warunek $f(0)=0$, należy przyjąć $C_2=C_3=0$.

Aby zagwarantować zgodność określenia $f(-1)$, musi być

$$\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+C_1=-\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}+C_2\,,$$

czyli

$$\frac{1}{6}+C_1=-\frac{1}{6}\,,$$

skąd $C_1=-1/3$.

Ostatecznie otrzymujemy

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{3} & \text{dla} \;\; x\in(-\infty,\,-1] \\ -\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2} & \text{dla} \;\; x\in(-1,\,0) \\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2} & \text{dla} \;\; x\in[0,\,+\infty) \end{cases}$$

---

[1]Dokładniej: Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $g(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+C_1$ ma na całej prostej pochodną określoną wzorem $g'(x)=x^2+x$, skąd wynika, że jeżeli $f(x)=g(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+C_1$ dla $x\in(-\infty,\,-1]$, to $f'(x)=g'(x)=x^2+x$ dla $x\in(-\infty,\,-1)$ oraz $f'(x^-)=g'(x)=x^2+x$ dla $x=-1$.

Co więcej, wzór $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+C_1$ dla $x\in(-\infty,\,-1]$ definiuje wszystkie funkcje różniczkowalne $f:(-\infty,\,-1]\to\mathbb{R}$ spełniające warunki $f'(x)=x^2+x$ dla $x\in(-\infty,\,-1)$ oraz $f'(x^-)=x^2+x$ dla $x=-1$.

748. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=6x+6 \qquad \text{dla} \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=x$ dla $x\in\{-1,\,0,\,2\}$. Wyznaczyć $f(3)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3+3x^2\right)=6x+6\,,$$

a funkcjami o drugiej pochodnej równej 0 są funkcje liniowe, funkcja f na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+Ax+B & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,1) \\ x^3+3x^2+Cx+D & \text{dla} \quad x\in(1,\,+\infty) \end{cases}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 1 wymaga istnienia granicy w tym punkcie, czyli zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x=1$. Musi więc zachodzić równość

$$A+B=C+D\,. \tag{$\clubsuit$}$$

Warunki $f(x)=x$ dla $x\in\{-1,\,0,\,2\}$ sprowadzają się odpowiednio do

$$-1=2-A+B\,, \tag{$\diamondsuit$}$$

$$0=B\,, \tag{$\heartsuit$}$$

$$2=20+2C+D\,. \tag{$\spadesuit$}$$

Rozwiązanie układu otrzymanych czterech równań ($\clubsuit$), ($\diamondsuit$), ($\heartsuit$) i ($\spadesuit$) prowadzi do

$$A=3\,, \qquad B=0\,, \qquad C=-21\,, \qquad D=24\,.$$

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+3x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,1) \\ x^3+3x^2-21x+24 & \text{dla} \quad x\in[1,\,+\infty) \end{cases}$$

Zatem $f(3)=15$.

749. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=|x|\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=0$ dla $x\in\{1,\,2\}$. Wyznaczyć $f(-1)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f''(x)=\begin{cases} -x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,0] \\ x & \text{dla} \quad x\in[0,\,+\infty) \end{cases}$$

Wobec tego

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}+C_1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\, 0] \\ \dfrac{x^2}{2}+C_2 & \text{dla} \quad x\in[0,\, +\infty) \end{cases}$$

Przy tym musi być $C_1=C_2$, aby powyższa funkcja była poprawnie określona i ciągła w $x=0$. Niech więc $C=C_1=C_2$.

Otrzymujemy

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^3}{6}+Cx+D_1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\, 0] \\ \dfrac{x^3}{6}+Cx+D_2 & \text{dla} \quad x\in[0,\, +\infty) \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio, musi być $D_1=D_2$, aby powyższa funkcja była poprawnie określona i ciągła w $x=0$. Niech dalej $D=D_1=D_2$.

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^3}{6}+Cx+D & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\, 0] \\ \dfrac{x^3}{6}+Cx+D & \text{dla} \quad x\in[0,\, +\infty) \end{cases}$$

lub krócej

$$f(x)=\frac{|x|^3}{6}+Cx+D\,.$$

Warunki $f(1)=f(2)=0$ pozwalają wyznaczyć stałe C i D:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{6}+C+D &= 0 \\ \dfrac{8}{6}+2C+D &= 0 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań dostajemy $C=-7/6$ oraz $D=1$.

W konsekwencji

$$f(x)=\frac{|x|^3}{6}-\frac{7x}{6}+1 \qquad \text{oraz} \qquad f(-1)=\frac{1}{6}+\frac{7}{6}+1=\frac{7}{3}\,.$$

750. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{los} x=\operatorname{nos} x, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{nos} x=\operatorname{sos} x, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sos} x=\operatorname{los} x\,.$$

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int e^x\cdot \operatorname{los} x\, dx\,.$$

Rozwiązanie:

Oznaczamy szukaną całkę przez $I(x)$, a następnie całkujemy trzykrotnie przez części całkując e^x i różniczkując $\operatorname{los} x$. Otrzymujemy

$$I(x)=\int e^x\cdot\operatorname{los} x\,dx=e^x\cdot\operatorname{los} x-\int e^x\cdot\operatorname{nos} x\,dx=e^x\cdot\operatorname{los} x-e^x\cdot\operatorname{nos} x+\int e^x\cdot\operatorname{sos} x\,dx=$$

$$=e^x\cdot\operatorname{los} x-e^x\cdot\operatorname{nos} x+e^x\cdot\operatorname{sos} x-\int e^x\cdot\operatorname{los} x\,dx=e^x\cdot\operatorname{los} x-e^x\cdot\operatorname{nos} x+e^x\cdot\operatorname{sos} x-I(x)\,,$$

skąd

$$I(x)=\frac{e^x\cdot\operatorname{los} x-e^x\cdot\operatorname{nos} x+e^x\cdot\operatorname{sos} x}{2}+C\,.$$

751. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\frac{x^2\,dx}{(x+1)^{19/10}}\,.$$

Rozwiązanie:

Całkujemy dwukrotnie przez części różniczkując czynnik x^2 i wykorzystując fakt, że potęgę dwumianu liniowego $x+1$ można wielokrotnie całkować:

$$\int x^2\cdot(x+1)^{-19/10}\,dx=-\frac{10}{9}\cdot x^2\cdot(x+1)^{-9/10}+\frac{20}{9}\int x\cdot(x+1)^{-9/10}\,dx=$$

$$=-\frac{10}{9}\cdot x^2\cdot(x+1)^{-9/10}+\frac{200}{9}\cdot x\cdot(x+1)^{1/10}-\frac{200}{9}\int 1\cdot(x+1)^{1/10}\,dx=$$

$$=-\frac{10}{9}\cdot x^2\cdot(x+1)^{-9/10}+\frac{200}{9}\cdot x\cdot(x+1)^{1/10}-\frac{2000}{99}\cdot(x+1)^{11/10}+C\,.$$

Uwaga: Całkę można też obliczyć wykonując podstawienie $t=x+1$.

752. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\ln\left(x^2+1\right)\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Dopisujemy do funkcji podcałkowej czynnik 1, po czym wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik 1 i różniczkując $\ln(x^2+1)$. Otrzymujemy:

$$\int\ln\left(x^2+1\right)\,dx=\int 1\cdot\ln\left(x^2+1\right)\,dx=x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-\int x\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx=$$

$$=x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx=x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-2\int dx+2\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\operatorname{arctg} x+C\,.$$