

Kolokwium nr 1: środa 28.02.2024, godz. 14:15-15:45, materiał zad. 738–762.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 22.02.2024.

Całka nieoznaczona, całkowanie przez części.

738. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje n -krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

739. Funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a ponadto wiadomo, że $f(1) = 0$. Co można wywnioskować o $f(2)$ oraz o $f(-1)$?

740. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$. Wskazać wśród nich wszystkie funkcję spełniające dodatkowy warunek $f(1) = f(2) = f(-2) = 0$.

741. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2023-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(2023)}(x) = e^{3x}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

742. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2023-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(2023)}(x) = \sin^2 x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

743. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx} \text{los } x = \text{nos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{nos } x = \text{sos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{sos } x = \text{los } x.$$

Wyznaczyć wszystkie funkcje 2023-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $f^{(2023)}(x) = \text{los}(2023x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

744. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, różniczkowalne na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ warunek $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$.

745. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które są dwukrotnie różniczkowalne na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i spełniają dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ warunek $f''(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$. Wskazać wśród nich funkcję spełniającą dodatkowy warunek $f(-1) = f(1) = f(4) = 0$.

746. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$f'(x) = \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(-3) = -3$. Wyznaczyć $f(3)$.

747. Skonstruować funkcję różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$f(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad f'(x) = \sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2} \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

748. Funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x) = 6x + 6 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = x$ dla $x \in \{-1, 0, 2\}$. Wyznaczyć $f(3)$.

749. Funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x) = |x|.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = 0$ dla $x \in \{1, 2\}$. Wyznaczyć $f(-1)$.

750. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx} \text{los } x = \text{nos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{nos } x = \text{sos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{sos } x = \text{los } x.$$

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int e^x \cdot \text{los } x \, dx.$$

751. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^2 \, dx}{(x+1)^{19/10}}.$$

752. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \ln(x^2 + 1) \, dx.$$

Obliczyć całki nieoznaczone¹:

$$\mathbf{753.} \int x^n \cdot \ln x \, dx \quad \mathbf{754.} \int \sin \ln x \, dx \quad \mathbf{755.} \int x^2 \cdot \sin 7x \, dx \quad \mathbf{756.} \int x^3 \cdot e^{5x} \, dx$$

$$\mathbf{757.} \int e^x \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx \quad \mathbf{758.} \int x \cdot (x-1)^{5/4} \, dx \quad \mathbf{759.} \int \frac{x}{(x+7)^e} \, dx$$

Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dla których $f'(x)$ zdefiniowane jest podanym wzorem:

$$\mathbf{760.} 5\pi^4 + |x| \quad \mathbf{761.} \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} \quad \mathbf{762.} |\sin x|$$

¹Zadania te należy rozwiązać nie używając całkowania przez podstawienie.