Podstawowe kryteria zbieżności szeregów.

1. Warunek konieczny zbieżności.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. Zbieżność szeregu nie zależy od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. Kryterium porównawcze.

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leqslant b_n$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. Kilka wzorcowych szeregów.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a.

5. Kryterium d'Alemberta.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g < 1\ ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g > 1\ ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. Kryterium Cauchy'ego.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

7. Kryterium d'Alemberta dla ciągów.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g < 1 \ ,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g > 1 \ ,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

8. Kryterium Cauchy'ego dla ciągów.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 \,,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1 \,,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

9. Zbieżność bezwzględna.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

10. Szeregi naprzemienne (kryterium Leibniza).

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n$$

jest zbieżny.